REPRESENTATIONS DE CARQUOIS ET GROUPES QUANTIQUES

Cours M2 LYON 1.

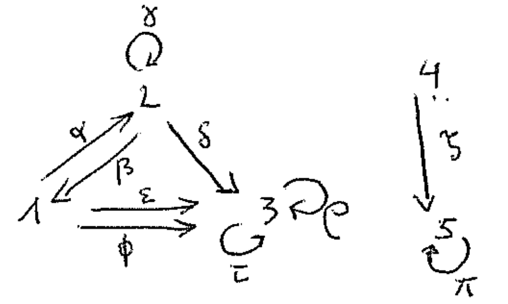
CHAPITRE 1

GENERALITES.

I ALGEBRES DES CHEMINS D'UN CARQUOIS.

Def : Un carquois Q est la donnée d'un ensemble Q_0 (de sommets) et d'un ensemble Q_1 (de flèches) ainsi que deux applications $s : Q_1 \longrightarrow Q_0$ (source) et $t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ (but).

Exemple :



$s(\alpha) = 1 \quad t(\alpha) = 2$

$Q_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi, \tau, \rho, \zeta, \pi\}$

Def : Si $s(\alpha) = t(\alpha)$, alors α est appelé une boucle.

Def : On appelle chemin du carquois Q une suite finie de la forme $c = (y, \alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, x)$ où $x, y \in Q_0$, $\alpha_i \in Q_1$, $n \in \mathbb{N}$

$s(\alpha_1) = x$, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$, $1 \leq i < n$, $t(\alpha_n) = y$.

$$\underset{x}{\cdot} \xrightarrow{\alpha_1} \cdot \xrightarrow{\alpha_2} \cdot \xrightarrow{\alpha_3} \cdots \cdot \xrightarrow{\alpha_n} \underset{y}{\cdot}$$

On pose alors $s(c) = x$, $t(c) = y$, $\ell(c) = n$ (qui peut être nul)

Def : Un cycle orienté est un chemin de longueur strictement positive tel que $s(c) = t(c)$.

Deux chemins c, c' de Q sont dits composables si $s(c) = t(c')$.
La composée $c.c'$ des chemins est alors donnée par.

$$c \cdot c' = (y, \alpha_n, \dots, \alpha_1, \alpha'_{n'}, \dots, \alpha'_1, x')$$

où $c = (y, \alpha_n, \dots, \alpha_1, x)$ et $c' = (y' = x, \alpha'_{n'}, \dots, \alpha'_1, x')$.

Soit k un corps et Q un carquois.

Def : On appelle algèbre des chemins l'espace

$$kQ := \bigoplus_{c \text{ chemin}} kc$$

muni de la multiplication k-bilinéaire définie par :

$$c * c' = \begin{cases} c \cdot c' & \text{si } c, c' \text{ sont composables} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que kQ est alors une algèbre associative et si Q_0 est fini kQ possède une unité : $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$, où $e_i = (i, i)$.

(Exercices 1-2-3.)

Notons que les éléments e_i, $i \in Q_0$, définis plus haut sont des idempotents orthogonaux, ie $e_i^2 = e_i$ et $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$.

(Exercices 4-5-6)

PROPOSITION : Les idempotents e_i sont primitifs, ie le A-module Ae_i est un module indécomposable.

Preuve : Supposons $Ae_i = M_1 \oplus M_2$ comme A-modules. On considère la projection π de Ae_i sur M_1 selon M_2. $\pi \in \mathrm{Hom}_A(Ae_i, Ae_i) \simeq e_i A e_i$.
D'après l'exercice 5 Fiche 1, il existe $f \in e_i A e_i$ tq $\pi(x) = xf$. De plus π étant une projection, $\pi^2 = \pi$ d'où $f^2 = f = f e_i$ et donc $f(f - e_i) = 0$.
D'après l'exercice 6, il vient $f = 0$ ou $f = e_i$, c'est à dire $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$. □

Lemme : Les idempotents e_i sont deux à deux non equivalents, ie $i \neq j \Rightarrow Ae_i \not\cong Ae_j$.

Preuve : Supposons qu'on a des isomorphismes inverses φ et ψ, $\varphi : Ae_i \to Ae_j$, $\psi : Ae_j \to Ae_i$. On a que φ est donné par un element $f \in e_i A e_j$ et ψ est donné par un élément $g \in e_j A e_i$. Le fait qu'ils soient inverses l'un de l'autre implique que $fg = e_i$ et $gf = e_j$. Donc, il vient $e_j \in Ae_iA$. Or Ae_iA admet pour base l'ensemble des chemins qui passent par i. Donc $j = i$. $\square$

II REPRESENTATIONS D'UN CARQUOIS

On fixe un carquois Q.

Def : Une <u>représentation</u> de Q est la donnée V d'un espace vectoriel V_i pour tout sommet i de Q_0 et d'une application linéaire V_α, $V_\alpha : V_{s(\alpha)} \longrightarrow V_{t(\alpha)}$ pour toute flèche α de Q_1.

Un <u>morphisme</u> de représentations $f : V \to W$ est la donnée d'applications linéaires $f_i : V_i \longrightarrow W_i$, $\forall i \in Q_0$, tq les carrés

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{V_\alpha} & V_j \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_j \\ W_i & \xrightarrow{W_\alpha} & W_j \end{array} \qquad i = s(\alpha),\ j = t(\alpha)$$

commutent pour toute flèche α. Le <u>morphisme identité</u> de V est donné par les $(Id_{V_i})_{i \in Q_0}$ et la composée de $f : V \to W$ avec $g : U \to V$ par $(f \circ g)_i = f_i \circ g_i$.

Def : On obtient ainsi la catégorie des représentations $Rep_k(Q)$.

Exemples : 1) Une représentation de $\circlearrowleft\!\cdot$ est équivalent à la donnée d'un k ev E et d'un endomorphisme $u : E \to E$.

2) Une représentation de $\cdot \longrightarrow \cdot$ est équivalent à la donnée de deux k ev E et F et d'un morphisme $u : E \longrightarrow F$.

Définition : Soit i ds Q_0, on définit la représentation S_i tq
$$(S_i)_j = \begin{cases} k & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_i)_\alpha = 0 \quad \forall \alpha \in Q_1 .$$

Lemme : La catégorie des représentations $\mathrm{Rep}_k(Q)$ est équivalente à celle de kQ-modules à gauche kQ-Mod.

Esquisse de preuve :

Soit $V \in \mathrm{Rep}_k(Q)$ on définit le kQ-module $F(V)$ par :

* $F(V) = \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$ comme ev.

* Si $c = (j, \alpha_n, \dots, \alpha_1, i)$ et $m \in \bigoplus_{i \in Q_0} V_i$, alors
$$c \cdot m = \iota_j \circ V_{\alpha_n} \circ V_{\alpha_{n-1}} \circ \dots \circ V_{\alpha_1} \circ \pi_i (m),$$
où : $\pi_i : V \to V_i$ et $\iota_j : V_j \to V$ sont la proj. et l'inj. naturelles.

Pour tout morphisme ϕ de représentation $\phi : V \to W$, On définit
$$F\phi := \bigoplus_{i \in Q_0} \phi_i : \bigoplus_{i \in Q_0} V_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} W_i$$

On vérifie que $F : \mathrm{Rep}_k Q \to kQ$-mod est un foncteur.

Inversement, soit $M \in kQ$-Mod. On définit la représentation GM par $(GM)_i = e_i M$,
$$(GM)_a : e_{s(\alpha)} M \longrightarrow e_{t(\alpha)} M$$
$$m \longmapsto \alpha M$$

On définit $G\phi : GM \to GN$ pour tout $\phi : M \to N$ par
$(G\phi)_i (e_i m) = e_i \phi(m)$. On vérifie que $G\phi$ est bien un morphisme de représentation.

On vérifie facilement que F et G sont des équivalences quasi-inverses l'une de l'autre : $FG \xrightarrow{\sim} 1_{kQ\text{-Mod}}$ et $GF \xrightarrow{\sim} 1_{Rep(Q)}$

$\square$

On pourra donc considérer une représentation comme un kQ-module et inversement.

Rem : $Rep(\circlearrowleft) \xrightarrow{\sim} k[X]\text{-Mod}$, $Rep(\longrightarrow) \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}\text{-Mod}$.

Lemme : Pour tout i dans Q_0, S_i est simple et réciproquement tout simple est de la forme S_i lorsque Q est fini sans cycle orienté.

Preuve : La première assertion est claire. Pour la réciproque, comme Q est fini sans cycle orienté, on peut définir dans Q_0 un ordre partiel $\leq$ par

$$i \leq j \iff \exists \text{ chemin de } i \text{ à } j$$

Soit V une représentation de Q et posons $Supp(V) = \{ i,\ \dim V_i \neq 0 \}$ cl

Comme V est non nul, $Supp(V)$ est non vide et possède un élément maximal. Soit i cet élément. Le fait que $i \to j$ dans Q implique $V_j = 0$ entraîne que S_i s'injecte dans V. Comme V est simple $S_i = V$.

$\square$

III Forme de Tits

La forme de Tits est une forme quadratique sur $\mathbb{Z}^{Q_0}$ associée à un carquois Q. On suppose dans la suite Q fini.

Def : On note $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{Z}^{Q_0} \times \mathbb{Z}^{Q_0} \longrightarrow \mathbb{Z}$,

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i \in Q_0} v_i w_i - \sum_{\alpha \in Q_1} v_{s(\alpha)} w_{t(\alpha)}.$$

La forme de Tits est alors définie par $q_Q(v) := \langle v, v \rangle$

On définit aussi la forme bilinéaire associée :

$$b_Q(v, w) = \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle = q_Q(v+w) - q_Q(v) - q_Q(w).$$

Def : Un vecteur $v \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ sera dit positif si $v_i \geq 0 \quad \forall i \in Q_0$

—————— sera appelé racine de q_Q si $q_Q(v) = 1$

A partir de maintenant les representations (et donc le modules) considérées seront de dimension finie sur k.

Nous allons donner une realisation homologique de la forme de Tits.

Soit $A = kQ$ et M un A-module à gauche.

On considère le complexe suivant

$$0 \longrightarrow \underbrace{\bigoplus_{\alpha \in Q_1} A e_{t(\alpha)} \otimes e_{s(\alpha)} M}_{P_1} \xrightarrow{f} \underbrace{\bigoplus_{i \in Q_0} A e_i \otimes e_i M}_{P_0} \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 \quad (*)$$

$$u \otimes m \longmapsto u\alpha \otimes m - u \otimes \alpha m$$

$$v \otimes m \longmapsto vm$$

On a clairement un complexe avec P_0, P_1 projectifs.

Proposition : Le complexe $(*)$ est une résolution projective.

Def : La resolution $(*)$ sera appelée dans la suite "resolution standard".

Preuve : Montrons que la suite est exacte. On va construire pour cela un scindage k-linéaire.

On considère $\delta_0 : M \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} A e_i \otimes e_i M$

$$m \longmapsto \sum_{i \in Q_0} e_i \otimes e_i m$$

et $\delta_1 : \bigoplus_{i \in Q_0} A e_i \otimes e_i M \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in Q_1} A e_{t(\alpha)} \otimes e_{s(\alpha)} M$

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n e_i \otimes e_i m \longmapsto \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_1 \cdots \alpha_j e_{t(\alpha_{j+1})} \otimes e_{s(\alpha_{j+1})} \alpha_{j+2} \cdots \alpha_n m$$

On a $g\delta_0(m) = \sum_i e_i^2 m = \sum_i e_i m = 1.m = m$

Maintenant calculons $(\delta_0 g + f\delta_1)(a e_x \otimes e_x m)$

Posons $a = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, on peut supposer $x = s(\alpha_n)$. Il vient

$$(\delta_0 g + f\delta_1)(ae_x \otimes e_x m) = \delta_0(ae_x^2 m) + f\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_1 \cdots \alpha_j e_{t(\alpha_{j+1})} \otimes e_{s(\alpha_{j+1})} \alpha_{j+2} \cdots \alpha_n m\Big)$$

$$= \sum_z e_z \otimes e_z a e_x m + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_1 \cdots \alpha_j \alpha_{j+1} \otimes e_{s(\alpha_{j+1})} \alpha_{j+2} \cdots \alpha_n m - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_1 \cdots \alpha_j e_{t(j+1)} \otimes \alpha_{j+1} \cdots \alpha_n m$$

$$= e_y \otimes am + \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n m + \alpha_1\alpha_2 \otimes \alpha_3 \cdots \alpha_n m + \cdots + \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n m + \alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes e_x m$$

où $y = t(\alpha_1)$

$$- e_{t(\alpha_1)} \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_n m - \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_n m - \cdots - \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes \alpha_n m$$

$$= \alpha_1 \cdots \alpha_n \otimes e_x m = ae_x \otimes e_x m.$$

Il reste à calculer : $(\delta_1 f)(a \otimes m)$, avec $a = \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}$, $m = M_x$, où $x = s(\alpha$

[$a \otimes m$ est vu ds la composante α_n de $\bigoplus_{\alpha \in Q_1} A e_{t(\alpha)} \otimes e_{s(\alpha)} M$].

Il vient $(\delta_1 f)(a \otimes m) = \delta_1(a\alpha_n \otimes m - a \otimes \alpha_n m) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_1 \cdots \alpha_j \otimes \alpha_{j+2} \cdots \alpha_n m - \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_1 \cdots \alpha_j \otimes \alpha_{j+2} \cdots \alpha$

$$= \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \otimes m = a \otimes m.$$

Conclusion, on a $g\delta_0 = Id$, $\delta_0 g + f\delta_1 = Id$, $\delta_1 f = Id$

Ce qui implique g surjective, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ et f injective. $\square$

Corollaire : Soient L et M deux kQ-modules, on a

(i) $\operatorname{Ext}^i_{kQ}(L, M) = 0$ pour tout $i \geq 2$

(ii) La suite exacte

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{kQ}(L,M) \longrightarrow \bigoplus_{i \in Q_0} \operatorname{Hom}_k(L_i, M_i) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \operatorname{Hom}_k(L_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)}) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{kQ}(L,M) \longrightarrow 0$$

où $\varphi\left((f_i)_{i\in Q_0}\right) = \left(M_\alpha f_{s(\alpha)} - f_{t(\alpha)} L_\alpha \right)_{\alpha \in Q_1}$

Plus visuellement :

$$\varphi : \quad \begin{tikzcd} L_{s(\alpha)} \arrow[r, "L_\alpha"] \arrow[d, "f_{s(\alpha)}"'] \arrow[dr, dashed] & L_{t(\alpha)} \arrow[d] \\ M_{s(\alpha)} \arrow[r, "M_\alpha"] & M_{t(\alpha)} \end{tikzcd}$$

(iii) Les foncteurs $\operatorname{Ext}^1_{kQ}(L,-) : kQ\text{-mod} \to k\text{-mod}$

$\operatorname{Ext}^1_{kQ}(-,M) : (kQ\text{-mod})^{op} \to k\text{-mod}$

sont exacts à droite

(iv) On note $\underline{\dim}\, L = (\dim L_i)_{i\in Q_0} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$. On a

$$\langle \underline{\dim}\, L, \underline{\dim}\, M \rangle = \dim \operatorname{Hom}_{kQ}(L,M) - \dim \operatorname{Ext}^1_{kQ}(L,M)$$

(v) $$q_Q(\underline{\dim}\, M) = \dim \operatorname{End} M - \dim \operatorname{Ext}^1(M,M).$$

Preuve : (i) On a une suite exacte $0 \to P_1 \to P_0 \to L \to 0$, où P_1 et P_0 sont des modules projectifs. En appliquant le foncteur $\operatorname{Hom}(-,M)$, on obtient une suite exacte : $\operatorname{Ext}^{i-1}(P_0,M) \to \operatorname{Ext}^i(L,M) \to \operatorname{Ext}^i(P_1,M)$ pour tout $i \geq 1$. En particulier, si $i \geq 2$, on a $0 \to \operatorname{Ext}^i(L,M) \to 0$ d'où $\operatorname{Ext}^i(L,M) = 0$.

(ii) On applique le foncteur $\operatorname{Hom}(-,M)$ comme dans (i). On obtient, en posant $F = \operatorname{Hom}(-,M)$, la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(L,M) \xrightarrow{Fg} \operatorname{Hom}_A(P_0,M) \xrightarrow{Ff} \operatorname{Hom}_A(P_1,M) \to \operatorname{Ext}^1(L,M) \to 0$$

Il reste à montrer que cette suite est bien isomorphe à la suite proposée.

Tout d'abord comme dans l'ex 5, Fiche 1, on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus A e_i \otimes e_i L, M\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_i e_i L, \bigoplus_i e_i M\right)$$

$$\phi \longmapsto \left((e_i \ell) \longmapsto (e_i \phi(e_i \otimes e_i \ell))\right)$$

$$\left((a e_i \otimes e_i \ell) \longmapsto a \varphi(e_i \ell)\right) \longleftarrow \varphi$$

Via cet isomorphisme F_g devient :

$$\mathrm{Hom}_A(L, M) \xrightarrow{F_g} \mathrm{Hom}_A(P_0, M) \xrightarrow{\sim} \bigoplus \mathrm{Hom}(e_i L, e_i M)$$

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ g \longmapsto \left(e_i \ell \longmapsto e_i(\varphi \circ g)(e_i \otimes e_i \ell) = e_i \varphi(e_i \ell\right)$$

car $g(e_i \otimes e_i \ell) = e_i^2 \ell = e_i \ell$ par définition de g.

Comme $\mathrm{Hom}_A(L, M)$ s'envoie naturellement dans $\bigoplus_i \mathrm{Hom}_k(e_i L, e_i M)$ puisqu'un A-morphisme respecte la Q_0-graduation de L et M, il vient que F_g est simplement l'injection naturelle.

Etudions maintenant F_f.

On a de la même manière un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_\alpha A e_{t(\alpha)} \otimes e_{s(\alpha)} L, M\right) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_\alpha \mathrm{Hom}\left(e_{s(\alpha)} L, e_{t(\alpha)} M\right)$$

Il reste à traduire F_f en terme de ces isomorphismes.

$$\bigoplus \mathrm{Hom}(e_i L, e_i M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_i A e_i \otimes e_i L, M\right) \xrightarrow{F_f} \mathrm{Hom}\left(A e_{t(\alpha)} \otimes e_{s(\alpha)} L, M\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\left(e_{s(\alpha)} L, e_{t(\alpha)} M\right)$$

$$(f_i) \longmapsto \left[(a e_i \otimes e_i \ell \longmapsto a f_i(e_i \ell))\right] \longmapsto \left[(a e_{t(\alpha)} \otimes e_{s(\alpha)} \ell \longmapsto a \alpha f_{s(\alpha)}(e_{s(\alpha)} \ell) - a f_{t(\alpha)}(\alpha \ell))\right]$$

$$\longmapsto \left[e_{s(\alpha)} \ell \longmapsto \alpha f_{s(\alpha)}(e_{s(\alpha)} \ell) - f_{t(\alpha)}(\alpha \ell)\right]$$

Comme annoncé.

(iii) Partons d'une suite exacte courte $0 \to K \to M \to N \to 0$ de A-modules.

On obtient alors par application du foncteur $\mathrm{Hom}_A(L,-)$:

$$\mathrm{Ext}^1(L,K) \to \mathrm{Ext}^1(L,M) \to \mathrm{Ext}^1(L,N) \to \mathrm{Ext}^2(L,K) = 0$$

D'où l'exactitude à droite du foncteur $\mathrm{Ext}^1(L,-)$.

L'autre assertion est similaire.

(iv) On a $\dim \bigoplus_i \mathrm{Hom}_k(L_i, M_i) = \sum_i (\dim L_i)(\dim M_i)$ et

$$\dim \bigoplus_\alpha \mathrm{Hom}_k(L_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)}) = \sum_\alpha \dim L_{s(\alpha)} \dim M_{t(\alpha)}$$

Il en résulte que $\dim \bigoplus \mathrm{Hom}_k(L_i, M_i) - \dim \bigoplus_\alpha \mathrm{Hom}_k(L_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)}) = \langle \underline{\dim} L, \underline{\dim} M$

D'après (ii) on obtient : $\langle \underline{\dim} L, \underline{\dim} M \rangle = \dim \mathrm{Hom}_{kQ}(L,M) - \dim \mathrm{Ext}^1_{kQ}(L,M)$

(v) Clair. $\square$

Rem : Une algèbre A vérifiant (i) est dite héréditaire. Cela revient à dire que tout sous-module d'un projectif est lui même projectif, ou aussi que tout module est quotient de deux projectifs. Les modules sur une algèbre héréditaire sont les plus simples à étudier après les espaces vectoriels.

Rem : Si $L = L_1 \oplus L_2$ et $M = M_1 \oplus M_2$ sont des décompositions en A-modules, alors $\mathrm{Ext}^1(L,M) = \bigoplus_{1 \le i,j \le 2} \mathrm{Ext}^1(L_i, M_j)$.

CHAPITRE 3.

LE THEOREME DE GABRIEL.

I ENONCÉ DU THEOREME

Définition : On note Ind kQ l'ensemble des objets indécomposables de Q-rep et on dira que Q est de représentation finie si il existe qu'un nombre fini d'indécomposables à isomorphisme près, ie $\# \mathrm{Ind}\, kQ/_{\sim} < +\infty$.

Rem : Le nbre d'indécomposables dépend bien sur du carquois Q, mais aussi du corps choisi. Par exemple pour $Q = \circlearrowleft$ et $k = \mathbb{R}$, on a $kQ = \mathbb{R}[X]$ et le module défini par $M = \mathbb{R}^2$ et $X.(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ est indécomposable pour $\theta \neq 0, \pi\ [2\pi]$, il ne l'est plus sur $\mathbb{C}$.

On supposera dans la suite k algébriquement clos.

Théorème de Gabriel : $\overline{k} = k$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) q_Q est définie positive

(ii) Q est de représentation finie sur k.

Dans ce cas on a une bijection

$$\mathrm{Ind}\, kQ/_{\sim} \xrightarrow{\ \sim\ } \{\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0};\ q_Q(\alpha) = 1\}$$

$$V \longmapsto \underline{\dim}\, V$$

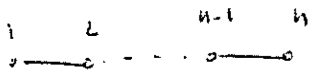
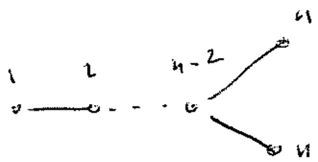
Def : L'ensemble de droite est l'ensemble des racines positives noté Φ^+.

On rappelle le théorème classique, voir par exemple "Representations and cohomology I", D. J. BENSON, Cambridge Studies 30.

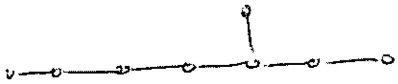
Théorème : Les conditions suivantes sur le carquois Q sont équivalentes

(i) q_Q est définie positive

(ii) Le graphe sous-jacent à Q est union disjointe de graphes de Dynkin de type A_n, D_n, E_6, E_7, E_8, $n \geq 0$

A_n :  D_n : 

E_6 :  E_7 : 

E_8 : 

Les racines de la forme q_Q sont alors exactement les racines du système de racines associé au graphe sous-jacent à Q.

Exemple : On considère $\vec{A}_n$ equiorienté :

$$1 \to 2 \to 3 \cdots n-1 \to n$$

$q_{\vec{A}_n}(\alpha) = 1$ ssi $\alpha = (0, 0, .., 0, 1, 1, .., 1, 0, .., 0)$ ou son opposé.

On obtient ainsi $\frac{n(n+1)}{2}$ racines positives et $\frac{n(n+1)}{2}$ racines négative.

Les représentations indécomposables sont alors de la forme

$$0 \to 0 \to \cdots \to 0 \to k \xrightarrow{1} k \cdots k \xrightarrow{1} k \to 0 \to \cdots \to 0$$

On considère D_4 :
$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[d] & \\ 1 \arrow[r] & 2 & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Les racines positives sont : $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$, $(1,1,0,0)$, $(0,1,1,0)$,

$(0,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,1)$, $(0,1,1,1)$, $(1,1,1,1)$, $(1,2,1,1)$

La représentation indécomposable correspondant à $(1,2,1,1)$ est donnée (à iso près)

$$\begin{tikzcd} & k \arrow[d, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]}"'] & \\ k \arrow[r, "{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]}"'] & k^2 & k \arrow[l, "{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]}"] \end{tikzcd}$$

En fait, cela revient à placer trois droites dans le plan en position générale.

Dans la suite, nous allons étudier une preuve du théorème de Gabriel ainsi qu'un moyen de construire ces représentations. La preuve que nous proposons utilise un peu de géométrie algébrique. Pour une preuve entièrement algébrique, voir le livre de Benson.

II ESPACE DES REPRESENTATIONS

On fixe un carquois Q et un vecteur de dimension $\underline{n} \in \mathbb{N}^{Q_0}$.

On définit l'espace des représentations, l'espace muni de la topologie de Zariski :

$$\operatorname{rep}(\underline{n}) = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \operatorname{Hom}_k\left(k^{n_{s(\alpha)}}, k^{n_{t(\alpha)}}\right)$$

$\operatorname{rep}(\underline{n})$ correspond donc à l'ensemble de toutes les représentations de Q, de vecteur de dimension $\underline{n}$, où l'espace posé sur le sommet i est identifié à k^{n_i}.
Pour $x \in \operatorname{rep}(\underline{n})$, on pourra noter X la représentation $X = (k^{n_i}, i \in Q_0, x_\alpha, \alpha \in Q_1)$.
On définit le groupe $GL(\underline{n}) := \prod_{i \in Q_0} GL_{n_i}(k)$ agissant sur $\operatorname{rep}(\underline{n})$ par

$$(g_i)_{i \in Q_0} \cdot (x_\alpha)_{\alpha \in Q_1} = \left(g_{t(\alpha)}\, x_\alpha\, g_{s(\alpha)}^{-1}\right)_{\alpha \in Q_1}$$

Proposition : On fixe un carquois Q et un vecteur de dimension $\underline{n}$.

(i) Il y a une bijection canonique entre les orbites de $GL(\underline{n})$ sur $rep(\underline{n})$ et les représentations V de Q tq $\underline{\dim}\, V = \underline{n}$ à isomorphismes près.

(ii) Le stabilisateur $GL(\underline{n})_x$ de x est isomorphe à $Aut_A(X)$ qui est un ouvert de $End_A(X)$.

(iii) $GL(\underline{n}) \cdot x$ est irréductible, localement fermé dans $rep(\alpha)$ de dimension $\dim GL(\underline{n}) \cdot x = \dim GL(\underline{n}) - \dim GL(\underline{n})_x$

(iv) Si x est non nul, $\operatorname{codim} GL(\underline{n}) \cdot x \geq 1 - q_Q(\underline{n})$.

(v) $\dim \bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O} < \dim \mathcal{O}$

Preuve : (i) est appelé lemme tautologique : deux représentations X, X' sont isomorphes ssi il existe un isomorphisme (g_i), $g_i \in Aut(k^{n_i})$ tq $\forall \alpha : i \to j$ le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} k^{n_i} \arrow[r, "x_\alpha"] \arrow[d, "g_i"'] & k^{n_j} \arrow[d, "g_j"] \\ k^{n_i} \arrow[r, "x'_\alpha"] & k^{n_j} \end{tikzcd}$$

ce qui est équivalent à dire que $(x'_\alpha) = (g_i) \cdot (x_\alpha)$.

(ii) La première assertion est exactement (i) avec $X' = X$.
La seconde vient du fait que $GL(\underline{n})$ est un ouvert de $\bigoplus End(k^{n_i})$ et $Aut_A(X) \simeq End_A(X) \cap GL(\underline{n})$.

(iii) On sait que $GL(\underline{n})$ est irreductible, cela implique que son image par $g \mapsto g \cdot x$ l'est également (l'image d'un irreductible par un morphisme de variétés algébriques l'est également).

Posons $GL(\underline{n}).x = \mathcal{O}$. On a un morphisme : $GL(\underline{n}) \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}$ qui est dominant et donc il existe un point y de l'image $\mathcal{O}$ possédant un voisinage ouvert dans $\mathcal{O}$, par la topologie de $\overline{\mathcal{O}}$. Par translation de $GL(\underline{n})$ tout point y de $\mathcal{O}$ possède cette propriété. Il en résulte que $\mathcal{O}$ est ouvert dans $\overline{\mathcal{O}}$ et donc que $\mathcal{O}$ est localement fermé.

La fibre de l'application $\varphi : GL(\underline{n}) \longrightarrow \mathcal{O} = GL(\underline{n}).x$ est isomorphe à $GL(n)_x$. Or comme φ est dominant, on sait qu'il existe un ouvert de $GL(n)$ sur lequel $\dim \varphi^{-1}(\varphi(y)) = \dim GL(\underline{n}) - \dim GL(\underline{n}).x$, pour tout y de cet ouvert. La dernière assertion en résulte.

(iv) $\operatorname{codim} GL(\underline{n}).x = \dim \operatorname{rep}(\underline{n}) - \dim GL(\underline{n}).x =$

$$= \sum_{\alpha \in Q_1} n_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} - \left(\dim GL(\underline{n}) - \dim GL(n)_x \right) \quad \text{d'après (iii)}$$

$$= \sum_{\alpha \in Q_1} n_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} - \left(\dim \bigoplus_i \operatorname{Hom}(k^{n_i}, k^{n_i}) - \dim \operatorname{End}_A X \right) \quad \text{par densité et (ii)}$$

$$= \dim \operatorname{End}_A X - q_Q(n) \geq 1 - q_Q(n) \quad \text{car } \mathbb{1}_X \in \operatorname{End}_A X.$$

(x est non nul !).

(v) Comme $\overline{\mathcal{O}} = \overline{GL(\underline{n}).x}$ est irréductible, et $\mathcal{O}$ ouvert dans $\overline{\mathcal{O}}$, il vient $\dim \overline{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O} < \dim \mathcal{O}$.

III (ii) $\Rightarrow$ (i) et preuve de Tits.

L'objet de la section est de prouver que si q_Q n'est pas définie positive, alors il y a un nombre infini d'indécomposables.

Supposons donc q_Q non définie positive. On peut trouver α' tq $q_Q(\alpha')=0$, $\alpha' \in \mathbb{Z}^{Q_0}$, non nul.

Posons $\alpha_i = |\alpha_i'|$ pour tout i. Alors $\alpha \in \mathbb{N}^{Q_0}$ et en explicitant q, on obtient $q(\alpha) \leq q(\alpha') = 0$ et α non nul.

D'après (iv) de la proposition codim $GL(\alpha) \cdot x \geq 1$ pour tout x non nul, et pour x nul aussi car $\alpha \neq 0$.

Or $\mathrm{rep}(\alpha) = \coprod_{\mathcal{O} \text{ orbite}} \mathcal{O}$. Si les orbites étaient en nombre fini on aurait

$$\dim \mathrm{rep}(\alpha) = \max \dim \mathcal{O} \leq \dim \mathrm{rep}(\alpha) - 1,$$ ce qui est absurde. Il y a donc un nombre infini d'orbites.

D'après (i) de la proposition, on a une infinité de représentation, à isomorphisme près, de vecteur de dimension α.
Or, s'il y avait un nombre fini d'indécomposables, il y aurait un nombre fini de telles représentations par le théorème de Krull-Schmidt (exercice facile). Il en résulte donc bien que l'on a un nombre infini d'indécomposables à iso près.

IV Preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii).

On suppose donc q_Q définie positive. On veut montrer qu'il y a un nombre fini d'indécomposables.
Commençons par un lemme :

Lemme : Soit X une représentation indécomposable sur un carquois Q tq q_Q est définie positive. Alors $\operatorname{End}_A X = k \mathbb{1}_X$

Rem : Ce lemme est faux dès que q_Q est positive non définie, par exemple sur Q. Voir exercice.

Preuve : On suppose que c'est vrai par récurrence sur $\dim X$. C'est vrai pour les simples.

$\operatorname{End}_A X = k \,\mathrm{Id} + g$ avec g nilpotent. C'est une conséquence immédiate du Lemme de Fitting mais on peut en faire une preuve indépendante de la manière suivante :

Soit $f \in \operatorname{End}_A X$ alors, si $P = \prod_i P_i$ où P est le polynôme minimal de f et P_i sont des polynômes deux à deux premiers entre eux, on a

$$X = \bigoplus_i \operatorname{Ker} P_i(f)$$ par le lemme des noyaux.

Or $\operatorname{Ker} P_i(f)$ est un sous module de X car $f \in \operatorname{End}_A X$ et non nul par minimalité de P. Comme X est indécomposable il vient

$$X = \operatorname{Ker} P_1(f) \quad \text{et} \quad P = P_1 = (X - \lambda)^n$$ car k est algébriquement clos.

Comme f a pour polynôme minimal $(X-\lambda)^n$, on a $f = \lambda \,\mathrm{Id} + g$, avec $g = f - \lambda \,\mathrm{Id}$ nilpotent.

On a donc à montrer que tout morphisme nilpotent de X est nul, ce qui achèvera la preuve.

Par l'absurde, on suppose $g \in \operatorname{End}_A X$ nilpotent avec $\dim \operatorname{Im} g$ minimal non nul.

Considérons l'entier n minimal tq $g^n = 0$. Si $n \geq 2$ alors en posant $h = g^2$, on a h nilpotent et $\dim \operatorname{Im} h < \dim \operatorname{Im} g$ (prendre

par exemple une réduite de Jordan). Absurde donc, puisque h est non nulle.
Il vient $g^2 = 0$ ce qui implique

$$\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} g \subset X.$$

17

On pose $K = \operatorname{Ker} g = K_1 \oplus \cdots \oplus K_\ell$ une décomposition du A-module $\operatorname{Ker} g$ en indécomposables et soit $\pi_i : \operatorname{Ker} g \longrightarrow K_i$ la projection selon cette décomposition. Soit i tq $\pi_i(\operatorname{Im} g) \neq 0$ (i existe sinon $\operatorname{Im} g$ serait nul).

J'affirme que $\pi_i|_{\operatorname{Im} g}$ est injective. Si ce n'était pas le cas,

on aurait $0 < \dim \operatorname{Im}(\pi_i \circ g) = \dim \operatorname{Im} g - \dim \operatorname{Ker} \pi_i|_{\operatorname{Im} g} < \dim \operatorname{Im} g$

et comme $(\pi_i \circ g)^2 = 0$, on aurait une contradiction avec la minimalité

de $\dim \operatorname{Im}(g)$. Soit donc ι l'injection $\iota : \underset{\underset{I}{\parallel}}{\operatorname{Im} g} \hookrightarrow K_i$.

Mettons la de côté un instant pour construire la somme amalgamée :

$$Y = \operatorname{coker}\begin{pmatrix} K \longrightarrow X \oplus K_i \\ k \longmapsto (k, -\pi_i(k)) \end{pmatrix}.$$

De sorte que l'on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccccc} K & \overset{\text{inj}}{\hookrightarrow} & X & & x \\ {\scriptstyle \pi_i}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K_i & \hookrightarrow & Y & & (\overline{x,0}) \\ k_i & \longmapsto & (\overline{0,k_i}) & & \end{array}$$

On peut aussi construire le carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & I \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, "{[g, 0]}"] & I \end{tikzcd}$$

De sorte que mis bout à bout on obtient :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "inj"] \arrow[d, "\pi_i"'] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d] & I \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K_i \arrow[r] & Y \arrow[r] & I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(C'est le "push out" de la suite exacte du haut par π_i).

Supposons que la suite du bas soit scindée. Cela fournit une retraction de Y vers K_i, puis une "retraction" π_i de X vers K_i en remarquant ($\pi_i \circ inj = \pi_i$) que π_i est inversible à droite ou que K_i est facteur direct de K.
.. K_i est facteur direct de X

Conclusion si la suite du bas est scindée,

. ~~Im~~possible, vu que X est indécomposable. $X = \begin{pmatrix} K_i & 0 & 0 \\ 0 & K' & \varepsilon \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$

Résultat des cours : la suite du bas n'est pas scindée et donc

$$Ext^1(I, K_i) \neq 0 .$$

[→ version expresso : $K' \hookrightarrow K \to K_i \to 0$
⇝ $0 \to (K', I)^1 \to (K, I)^1 \to (K_i, I)^1 \to$

Reprenons l'injection $0 \to I \xrightarrow{i} K_i$.

Cela donne par le foncteur $Ext^1(?, K_i)$:

$(Ext^2 = 0)$

$$Ext^1(K_i, K_i) \to \underset{\substack{\neq \\ 0}}{Ext^1(I, K_i)} \to 0$$

Cette surjectivité donne $\dim \mathrm{Ext}^1_A(K_i, K_i) > 0$

Or par recurrence $\dim \mathrm{Hom}_A(K_i, K_i) = k$ car $K_i \subset K \subsetneq X$.

Donc $$0 < q(\underline{\dim}\, K_0) = \dim \mathrm{Hom}_A(K_i, K_i) - \dim \mathrm{Ext}^1_A(K_i, K_i)$$
$$= 1 - \dim \mathrm{Ext}^1_A(K_i, K_i) \leq 0$$

Absurde

$\square$

Comme q_Q est definie positive, en prenant X indécomposable on a :

$$0 \leq \mathrm{codim}\, GL(\alpha) \cdot x = \dim \mathrm{End}_A X - q_Q(\alpha) = 1 - q_Q(\alpha) \leq 0$$

avec $\alpha = \underline{\dim}\, X \neq 0$.

On a donc egalité $q_Q(\alpha) = 1$ et α est bien une racine positive de q_Q. De plus, la codimension de $GL(\alpha) \cdot x$ est nulle donc $GL(\alpha) \cdot x$ est un ouvert dense.

Donc l'application $$f : \mathrm{Ind}\, kQ/_\sim \longrightarrow \Phi^+$$
$$Y \longmapsto \underline{\dim}\, Y$$

est bien définie. Elle est injective, sinon on aurait $Y \neq Y'$ avec $f(Y) = f(Y')$, donc deux ouverts denses disjoints ce qui est absurde par (v) de la proposition.

Or l'ensemble des racines Φ^+ est discret et compact car q_Q est definie positive, donc Φ^+ est fini. Ce qui implique Q est de representation finie

Il reste à montrer que l'application f est surjective.

Soit β une racine positive. L'espace $\mathrm{rep}(\beta)$ est réunion d'orbite et cette réunion est finie car il n'y a qu'un nombre fini d'indécomposables à isomorphisme près. Donc $\dim \mathrm{rep}(\beta) = \dim \mathcal{O}$ pour une (unique) orbite et $\mathcal{O}$ une orbite dense ouverte. Soit $\mathcal{O} = GL(\beta) \cdot y$

On a donc

$$0 = \operatorname{codim} GL(\beta) \cdot y = \dim \operatorname{End}_A(Y) - q_Q(\beta)$$

$$= \dim \operatorname{End}_A(Y) - 1 \Rightarrow \dim \operatorname{End}_A(Y) = 1.$$

Supposons $Y = Y_1 \oplus Y_2$, on aurait $\begin{pmatrix} 1_{Y_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{Y_2} \end{pmatrix}$

dans $\operatorname{End}_A(Y)$. Donc Y est indécomposable dans $f^{-1}(\beta)$.

$\square$

V Généralisation : le Théorème de Kac.

On se contentera d'énoncer sans preuve le théorème de Kac dont le but est de caractériser les vecteurs de dimension des représentations irréductibles d'un carquois fini quelconque ($\overline{k} = k$).

Rappelons que $\langle\,,\,\rangle_Q$ est la forme de Tits, $(\,,\,)$ la forme bilinéaire symétrique associée. On note α_i les générateurs canoniques de $\mathbb{Z}^{Q_0}$, $i \in Q_0$.

Définition : α_i est une racine simple s'il n'y a pas de boucle en i. Dans ce cas, on définit la réflexion par rapport à e_i par

$$\sigma_i(v) := v - (e_i, v)\, e_i$$

Le groupe de Weyl est le ss groupe W de $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^{Q_0})$ engendré par les σ_i.

Rque : les σ_i préservent la forme $(\,,\,)$.

Définition : Un vecteur $v \in \mathbb{Z}^{Q}$ est appelé racine réelle si $v = w.\alpha_i$, $w \in W$ et α_i racine simple. On note Δ^{re} l'ensemble des racines simples.

$$\Delta^{re} = \bigcup_{\alpha_i \text{ simple}} W.\alpha_i$$

Définition : Le cône fondamental $K_Q \subset \mathbb{Z}^{Q_0}$ est l'ensemble des vecteurs $v \geq 0$ tels que $\mathrm{supp}(v)$ connexe et $(v, e_i) \leq 0$ pour toute racine simple e_i. L'ensemble des racines imaginaires est

$$\Delta^{im} = \bigcup_{w \in W_Q} w(K_Q \cup -K_Q)$$

K2

Rque 1 : $q(v)=1$ pour toute racine réelle v.

$q(v) = \langle v,v\rangle = \frac{1}{2}(v,v) = \frac{1}{2}\sum v_i (v,\alpha_i) \leq 0$. (car $(v,\alpha_i)\leq 0$ si α_i racine simple et $(\alpha_i,\alpha_j)\leq 0$ $\forall j$ si α_i racine non simple. Donc $q(v)\leq 0$ $v\in\Delta^{im}$.

Rque 2 : Si Q est Dynkin alors $\Delta^{im}=\emptyset$ et $\Delta^{re}=R$

Rque 3 : Si Q est un carquois de Dynkin étendu

$\Delta^{im} = \mathbb{Z}\delta$, $K_Q = \{n\delta\ ;\ n\geq 1\}$ δ générateur de $q(\delta)=0$.

Th 4 : Soit $v\in\mathbb{N}^{Q_0}$ (Kac '80).

a) $\exists$ une rep. indécomposable de vecteur de dimension v ssi v est une racine positive (réelle ou imaginaire).

b) Si v est une racine réelle, on a unicité.

c) Si v est une racine imaginaire, on a une infinité d'indécomposables (à iso près) d'ordre $\geq 1-q(v)$.

d) Si Q est un carquois de Dynkin étendu et $v=n\delta$ alors $\mathrm{Ind}\,\mathrm{Rep}(v)/_{\sim} \simeq \mathbb{P}$

CHAPITRE 4

GROUPE DE WEYL ET FONCTEURS DE REFLEXION

Ce chapitre fournit une approche constructive des indécomposables ds le cas Dynkin.

I GROUPE DE WEYL

On considère un carquois Q fini et sans boucle. Soit q_Q sa forme de Tits et b_Q la forme symétrique (doublée) associée.

Def : Pour tout i dans Q_0, on note s_i la reflexion de $\mathbb{R}^{Q_0}$ tq

$$s_i(v) = v - \frac{b_Q(v, \alpha_i)}{q_Q(\alpha_i)} \alpha_i$$

où $\alpha_i = (0, .., 0, 1, 0, .., 0)$. Notons que comme le carquois est sans boucle $q_Q(\alpha_i) = 1$ et s_i est la reflexion fixant l'hyperplan perpendiculaire à α_i.

Def : On appelle groupe de Weyl le groupe engendré par les s_i, $i \in Q_0$. On notera $W(Q)$ ou W ce groupe.

Proposition : On suppose que Q est un diagramme de Dynkin. Alors $W(Q)$ est fini et aucun vecteur de $\mathbb{R}^{Q_0}$ n'est fixé par $W(Q)$.

Preuve : Comme Q est Dynkin, q_Q est définie positive et $W(Q)$ est un sous groupe de $SO_n(\mathbb{Z}) \subset SO_n(\mathbb{R})$. C'est donc un groupe discret et compact, il est donc fini. Soit v tq $s_i(v) = v$ $\forall i$, alors $b_Q(v, \alpha_i) = 0$ $\forall i$ et v est nul car b est non dégenerée.

Def : Une transformation de Coxeter sur $\mathbb{R}^{Q_0}$ est le produit de s_i pour tout i de Q_0 dans un ordre fixé.

Dans la suite on supposera que Q est un diagramme de Dynkin.

LEMME : Soit $c = s_1 \cdots s_n$ une transformation de Coxeter sur $\mathbb{R}^{Q_0}$.

(i) La transformation c n'a pas de vecteurs fixes non nuls

(ii) Soit v dans $\mathbb{R}^{Q_0}$, alors il existe m tel que $c^m(v)$ n'est pas positif.

Preuve : (i) Posons $v = \sum v_i \alpha_i$ et $c(v) = v$. Alors $s_1(v) = s_2 \cdots s_n(v)$. Ce qui implique que la composante en α_1 de $s_1(v)$ est encore v_i, ce qui implique $s_1(v) = v$. En répétant cet argument, on obtient que v est fixé par tout s_i, il est donc nul par la proposition précédente.

(ii) Supposons $c^m(v)$ positif pour tout m, alors $\sum_{i=0}^{\mathrm{ordre}(c)-1} c^i(v)$ est positif et fixé par c, contradiction avec (i).

Rque : (ii) est faux si Q n'est pas un diagramme de Dynkin. Ex : $Q = \bullet \rightrightarrows \bullet$ et $v = \delta$. On a bien sûr $c^m(\delta) = \delta$ $\forall m$.

Def : Le sommet i d'un carquois est appelé puits, resp. source, si toutes les flèches connectées à i vont vers i, resp. partent de i.

Def : Soit Q un carquois, on note $s_i Q$, $i \in Q_0$, le carquois Q où toutes les flèches connectées à i ont été inversées.

Def : Un ordre $i_1, \dots, i_n$ de sommets de Q est dit admissible si pour tout k i_k est un puits de $s_{i_{k+1}} \dots s_{i_n} Q$.

Notons que si Q est un carquois sans cycle orienté alors l'ordre défini ds le premier chapitre permet d'affirmer qu'un puit et une source existe toujours (minimalité et maximalité pour l'ordre). Il en resulte facilement qu'il existe toujours un ordre admissible sur Q.

Exemple :

$$\underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ} \qquad 3 \quad 2 \quad 1 \text{ est un ordre admissible.}$$

$$\underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longleftarrow \underset{3}{\circ} \qquad 2 \quad 1 \quad 3 \text{ ———————}$$

Def : Soit i un puits de Q. On définit le foncteur S_i^+

$$S_i^+ : \operatorname{rep} Q \longrightarrow \operatorname{rep} s_i Q$$ de la manière suivante :

Soit $V = (V_i, i \in Q_0, V_\alpha, \alpha \in Q_1)$ une representation de Q. On définit $S_i^+ V = W = (W_i, i \in Q_0, W_\alpha, \alpha \in Q_1)$ par :

$W_j = V_j$ pour $j \neq i$ et

$$W_i = \operatorname{Ker}\left[\bigoplus_{\alpha_{ji} : j \to i} V_j \xrightarrow{\phi} V_i \right] \quad \text{où } \phi = \bigoplus_{\alpha_{ji}} V_{\alpha_{ji}}$$

Si $k \neq i$ $W_{\alpha_{kj}} = V_{\alpha_{kj}} : W_k \longrightarrow W_j$

Si $k = i$ $W_{\alpha_{..}} = \pi_j |_{W_i}$ où π_j est la projection naturelle sur

Soit $\psi : V \longrightarrow V'$ un morphisme de représentations.

Alors on définit $(S_i^+\psi)_j = \psi_j$ pour $j \neq i$. Pour définir sa composante en i, on remarque que :

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{j\to i} V_j \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\oplus\varphi_j"'] & V_i \arrow[d, "\psi_i"] \\ \bigoplus_{j\to i} V'_j \arrow[r, "\phi'"] & V'_i \end{tikzcd}$$

commute.

Il en résulte que la restriction de $\bigoplus_{j\to i}\varphi_j$ à W_i s'envoie bien vers W_i'.

On note donc $$(S_i^+\psi)_i := \bigoplus_{j\to i}\varphi_j \Big|_{W_i}.$$

On vérifie qu'on a bien défini un morphisme de représentations $S_i^+\psi$ de S_i^+V vers S_i^+V' et que S_i^+ a bien les propriétés fonctorielles requises.

Définition : De façon duale, on définit quand i est une source le foncteur

$$S_i^- : \operatorname{rep} Q \longrightarrow \operatorname{rep} s_i Q$$ de la manière suivante.

Soit $V = (V_i,\ i\in Q_0,\ V_\alpha,\ \alpha\in Q_1)$ une représentation de Q. On définit $S_i^- V = W = (W_i,\ i\in Q_0,\ W_\alpha,\ \alpha\in Q_1)$ par

$W_j = V_j$ pour $j \neq i$ et

$$W_i = \operatorname{coker}\Big[\, V_i \xrightarrow{\ \psi\ } \bigoplus_{\alpha_{ij} : i\to j} V_j \Big] \quad \text{où } \psi = \bigoplus V_{\alpha_{ij}}$$

Si $k \neq i$ $\quad W_{\alpha_{jk}} = V_{\alpha_{jk}} : W_j \longrightarrow W_k$.

Si $k = i$ $\quad W_{\alpha_{ji}} = \overline{\iota_j}$, où ι_j est l'injection naturelle de V_j dans $\bigoplus V_j$ et $\overline{}$ de passage au quotient.

Soit $\varphi : V \longrightarrow V'$ un morphisme de représentation. Alors on définit $(S_i^- \varphi)_j = \varphi_j$ pour $j \neq i$. Pour définir sa composante en i, on remarque que:

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \bigoplus_{i \to j} V_j \arrow[d, "\oplus \varphi_j"] \\ V_i' \arrow[r, "\psi"] & \bigoplus_{i \to j} V_j' \end{tikzcd}$$

commute.

Il en résulte que le passage au quotient envoie bien W_i vers W_i'.
On note donc $(S_i^- \varphi)_i = \overline{\bigoplus_{i \to j} \varphi_i}$.

On vérifie que S_i^- a bien toutes les propriétés requises.
Les foncteurs $S_i^{\pm}$ sont les foncteurs de Berstein-Gelfand-Ponomarev (BGP)

Proposition ; Soit i un puit de Q, alors S_i^+ et S_i^- fournissent une équivalence de catégorie entre la sous-catégorie des représentation de Q tq ϕ est surjective et la sous-catégorie des représentation de $s_i Q$ tq ψ est injective. Les foncteurs S_i^+ et S_i^- fournissent donc une bijection entre les indécomposables de Q et les indécomposables de $s_i Q$ à l'exception des simples S_i qui sont annulés par chacun de ces foncteurs.

Preuve : Soit V tq ϕ est surjective. Montrons que $S_i^- S_i^+ V \simeq V$
Effectivement : Soit $W := S_i^+ V$, on a

$$0 \to W_i \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{j \to i} V_j \xrightarrow{\phi} V_i \to 0$$

Donc par surjectivité coker $\psi = V_i$. Le reste est trivial. On vérifie l'assertion analogue pour les morphismes.

$$\begin{tikzcd} S_i^- S_i^+ V \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ S_i^- S_i^+ V' \arrow[r, phantom, "\simeq"] & V' \end{tikzcd}$$

commute.

Prouvons la dernière assertion. Toute représentation de Q se décompose en la somme directe d'une représentation tq ϕ est surjective et une représentation concentrée en i (ie $n_i S_i$). Comme ces foncteurs commutent à la somme directe, l'assertion sur les indécomposables résulte de l'équivalence.

$\square$

Lemme : Soit V une représentation de Q tq ϕ est surjective, alors $\underline{\dim}\, S_i^+ V = s_i(\underline{\dim}\, V)$. De même si V est une représentation de Q tq φ est injective : $\underline{\dim}\, S_i^- V = s_i(\underline{\dim} V)$.

Preuve : La première assertion est claire puisque la surjectivité implique :
$\dim W_j = \dim V_j$ et $\dim W_i = -\dim V_i + \sum_{j \to i} \dim V_j$

L'autre assertion est analogue. $\square$

Definition : Soit $i_1, \dots, i_n$ un ordre admissible pour les sommets de Q.
Le foncteur de Coxeter C^+ est défini par

$$C^+ = S_{i_1}^+ \cdots S_{i_n}^+ : \text{rep}\, Q \longrightarrow \text{rep}\, Q.$$

On défini aussi le foncteur de coxeter C^-.

$$C^- = S_{i_n}^- \cdots S_{i_1}^- : \text{rep}\, Q \longrightarrow \text{rep}\, Q$$

Rem : Etant donné que chaque flèche est retournée deux fois, on a bien $s_{i_1} \cdots s_{i_n} Q = Q$.

Proposition : Soit Q un diagramme de Dynkin. Tout indécomposable de rep Q peut être construit à partir d'un module simple pour un carquois Q' et des foncteurs BGP.

Preuve : Soit V un indécomposable de rep Q. Alors, on peut construire $(C^+)^m V$ dans rep Q. D'après I et ce qui précède, $c^m(\underline{\dim} V) \not> 0$ pour un m donc $(C^+)^m V = 0$. Ceci implique que pour une suite de S_i^+, disons $S_{i_{k+1}}^+ \cdots S_{i_1}^+ V = 0$, si on choisit cette suite minimale, on a : $S_{i_k}^+ \cdots S_{i_1}^+ V$ est simple disons S_i.

D'après la proposition précédente, il vient : $V = S_{i_1}^- \cdots S_{i_k}^- (S_i)$.

$\square$

Donné par une partie du Théorème de Kac

Corollaire : L'ensemble des racines de q_Q est exactement $\bigcup_i W(Q).\alpha_i$.

Preuve : $\supset$ est clair car $W(Q)$ conserve la forme quadratique.
$\supset$ provient de la proposition précédente et du lemme.

$\square$

Rque : Cette construction dans le cas Dynkin a un avantage théorique. Il permet la preuve du Théorème de Gabriel pour un corps quelconque. On évite effectivement le lemme de Ringel. Ceci sera important dans la suite.

CHAPITRE 5
ALGEBRES DE HALL

I DEFINITION

1.1 : Catégories finies

Les catégories sur lesquelles nous travaillerons dans ce chapitre seront des catégories de A-modules de dimension finie sur $k = \mathbb{F}_q$, où A est une algèbre de carquois sur $\mathbb{F}_q$. On pourra aussi considérer des catégories de modules "nilpotents" sur A, ie $\nexists$ chemin non trivial et nilpotent sur M. En particulier la catégorie $\mathcal{A}$ considérée vérifiera les propriétés suivantes

$$\left| \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \right| < \infty, \qquad \left| \mathrm{Ext}^1(M,N) \right| < \infty.$$

On peut généraliser à d'autres catégories à condition qu'elles soient de dimension globale finie, ie il y a une borne pour les tailles de résolutions projectives.

1.2 Groupe de Grothendieck et formes d'Euler.

On notera $K(\mathcal{A})$ le groupe de Grothendieck sur $\mathbb{Z}$ de $\mathcal{A}$. Il est libre engendré par les classes d'objets simples. On a une application $Ob(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{A})$, $M \longmapsto [M] = \sum m_i [S_i]$, où m_i est la multiplicité de S_i dans M (décomposition de JH).

$\langle M,N \rangle_a$ est la forme d'Euler additive : $\dim \mathrm{Hom}(M,N) - \dim \mathrm{Ext}^1(M,N)$

$(M,N)_a$ ——— symétrisée. $\langle M,N\rangle_a + \langle N,M\rangle_a$

$\langle M,N\rangle_m$ ——— multiplicative : $\left|\mathrm{Hom}(M,N)\right|^{1/2} \left|\mathrm{Ext}^1(M,N)\right|^{-1/2}$

$(M,N)_m$ ——— symétrisée $\langle M,N\rangle_m \cdot \langle N,M\rangle_m$

1.3 L'algèbre de Hall

On considère l'ensemble $\mathcal{X}$ des objets de $\mathcal{A}$ à isomorphisme près et l'espace vectoriel

$$H_{\mathcal{A}} := \bigoplus_{M \in \mathcal{X}} \mathbb{C}[M]$$

Soit $\mathcal{P}^R_{M,N}$ l'ensemble des suites exactes $0 \to N \to R \to M \to 0$ et soit $P^R_{M,N} = |\mathcal{P}^R_{M,N}|$. (On vérifie que c'est fini).

Pour tout objet M, on pose $a_M = |\mathrm{Aut}(M)|$.

Notons le lemme suivant :

Lemme : Soient M, N, R des $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, on a :

$$\frac{1}{a_M a_N} P^R_{M,N} = |\{L \subset R \mid L \simeq N \text{ et } R/L \simeq M\}|$$

Preuve : $\mathcal{P}^R_{M,N}$ peut être vu comme l'ensemble $\{(\iota,\pi),\ \iota \in \mathrm{Inj}(N,R),\ \pi \in \mathrm{Surj}(R,M),\ \pi\iota = 0$

On a que $\mathrm{Aut}M \times \mathrm{Aut}N$ agit sur $\mathcal{P}^R_{M,N}$ par $(g,h)\cdot(\iota,\pi) = (\iota h^{-1}, g\pi)$

Cette action est libre (le stabilisateur est trivial en tt point).

On vérifie que l'on a le triangle :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}^R_{M,N} \arrow[r] \arrow[d] & \{L \subset R \mid L \simeq N,\ R/L \simeq M\} \\
\mathcal{P}^R_{M,N} / \mathrm{Aut}M \times \mathrm{Aut}N \arrow[ur, dashed] &
\end{tikzcd}$$

$$(\iota,\pi) \longmapsto \mathrm{Im}\,\iota$$

Montrons que la flèche de passage au quotient est bijective. Elle est clairement surjective.

On suppose donc que (ι,π) et (ι',π') ont même image $\iota(N) = \iota'(N)$.

On a donc :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, dotted] & R \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal, "1"] \arrow[dr, "f"] & M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota'"] & R \arrow[r, "\pi'"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Par hypothèse, $\pi'\iota = 0$ d'où l'existence de h qui est auto. De même $f\iota = 0$ d'où l'existence de g par passage au quotient. On a donc $\iota' = \iota h^{-1}$ et $\pi' = g\pi$

Donc (ι,π) et (ι',π') sont dans la même orbite. $\square$

On définit sur H_A une multiplication donnée par :

$$[M]\cdot[N] = \langle M,N\rangle_m \sum_{R\in\chi} \frac{1}{a_M\, a_N} P_{M,N}^R \, [R]$$

Rque : le membre de droite est bien défini puisque le nombre d'extensions $Ext^1(M,N)$ est fini.

On peut réinterpréter cette multiplication de la façon suivante :

Soit $H_A = \{ f : \chi \to \mathbb{C} \mid supp(f) \text{ est fini} \}$

H_A est alors muni du produit de convolution

$$(f\cdot g)(R) = \sum_{Q\subseteq R} \langle R/Q, Q\rangle_m f(R/Q)\, g(Q) \qquad (*)$$

Il suffit pour voir cela de montrer que $f \longmapsto \sum_{[M]} f([M])[M]$ fournit bien une identification entre les deux espaces et montrer que les multiplications sont equivalentes en posant dans $(*)$ $f = 1_M$ $g = 1_N$

Proposition : Cette multiplication définit une structure d'algèbre associative sur H_A d'unité $1 = [0_A]$, où 0_A est le module trivial.

Preuve : Il est clair que $[0_A]$ est l'unité par $(*)$. Montrons l'associativité :

$$(f\cdot(g\cdot h))(M) = \sum_{N\subset M} \langle M/N, N\rangle_m f(M/N)\,(g\cdot h)(N)$$

$$= \sum_{N\subset M,\, L\subset N} \langle M/N, N\rangle_m \langle N/L, L\rangle_m f(M/N)\, g(N/L)\, h(L)$$

Or $\langle M/N, N\rangle_a + \langle N/L, L\rangle_a = \langle M/N, L\rangle_a + \langle M/N, N/L\rangle_a + \langle N/L, L\rangle_a$ donc

$$= \sum_{N\subset M,\, L\subset N} \langle M/N, L\rangle_m \langle M/N, N/L\rangle_m \langle N/L, L\rangle_m f(M/N)\, g(N/L)\, h(L)$$

De même, on a : $((f\cdot g)\cdot(h))(M) = \sum_{R\subset M} \langle M/R, R\rangle_m (f\cdot g)(M/R)\; h(R)$

$$= \sum_{R\subset M,\ S\subset M/R} \langle M/R, R\rangle_m \langle (M/R)/S, S\rangle_m\, f((M/R)/S)\, g(S)\, h(R)$$

On a une bijection naturelle : $\{S' \mid R\subset S'\subset M\} \xrightarrow{\sim} \{S \mid S\subset M/R\}$.

$$S' \longmapsto S'/R = \pi(S')$$
$$\pi^{-1}(S) \longleftarrow\!\shortmid\ S$$

où $M \xrightarrow{\pi} M/R$

car $\pi^{-1}\pi(S') = S' + \ker\pi = S' + R = S'$.

En remarquant maintenant que $(M/R)/(S'/R) \simeq M/S'$

(Regarder le morphisme $\bar{m} \in M/R \to \bar{m} \in M/S'$ ou plus amusant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & S' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M/S' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S'/R \arrow[r] \arrow[d] & M/R \arrow[r] \arrow[d] & (M/R)/(S'/R) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

par le diagramme des 9.)

On a alors :

$$= \sum_{R\subset S'\subset M} \overbrace{\langle M/S', R\rangle_m \langle S'/R, R\rangle_m}^{\langle M/R, R\rangle_m} \langle M/S', S'/R\rangle_m\, f(M/S')\, g(S'/R)\, h(R)$$

Ce qui est exactement le terme attendu. $\square$

Rque : On a montré :

$$[M_1][M_2][M_3] = \sum_R \langle M_1, M_2\rangle \langle M_1, M_3\rangle \langle M_2, M_3\rangle \left| \{ L_3 \subset L_2 \subset L_1 = R \,/\, L_3 \simeq M_3,\ L_2/L_3 \simeq M_2,\ L_1/L_2 \simeq M_1 \} \right| [$$

On a en général :

$$[M_1]\cdots[M_n] = \sum_R \Big(\prod_{i<j} \langle M_i, M_j\rangle_m \left| \{ L_n \subset \cdots \subset L_1 = R \,/\, L_i/L_{i+1} \simeq M_i \} \right| \Big) [R]$$

II Le Théorème de Ringel sur les Algèbres de Kac-Moody

2.1 Notations et préliminaires.

On note $v = q^{1/2}$, $[n]_+ = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$, $[n] = q^{\frac{n-1}{2}}+\cdots+q^{\frac{1-n}{2}} = q^{\frac{1-n}{2}}[n]_+$

Ce sont les entiers quantiques.

On aura besoin aussi des coefficients binomiaux quantiques.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_+ = \frac{[n]_+!}{[k]_+!\,[n-k]_+!}, \quad \text{où} \quad [n]_+! = [n]_+[n-1]_+\cdots[1]_+$$

Et de même :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}, \quad \text{où} \quad [n]! = [n]\cdots[1]$$

Notons que $[n]_+ = \# \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q)$ et donc $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_+ = \# \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F}_q)$

Plus généralement

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_+ = \# Gr_{k,n}(\mathbb{F}_q)$, où $Gr_{k,n}$ est la grassmannienne des k-espaces dans un espace de dimension n. Pour montrer cela, il suffit de faire agir $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur la grassmannienne $Gr_{k,n}(\mathbb{F}_q)$, de remarquer que l'action est transitive et que le stabilisateur est $\begin{pmatrix} \square & * \\ 0 & \square \end{pmatrix}$, il vient donc :

$$\# Gr_{k,n}(\mathbb{F}_q) = \frac{\# GL_n}{\# GL_k \, \# GL_{n-k} \, q^{k(n-k)}} = \frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})}{(q^k-1)\cdots(q^k-q^{k-1})(q^{n-k}-1)\cdots(q^{n-k}-q^{n-k-1})\,q^{k(n-k)}}$$

$$= \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}[n]_+}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}[k]_+ \cdot q^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}[n-k]_+ \; q^{k(n-k)}} = \frac{[n]_+}{[k]_+[n-k]_+}$$

Notons qu'en $q=1$, on a $[n]_+ = [n] = n$ et $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_+ = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}$.

On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée à la matrice de Cartan $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ $\left(\begin{smallmatrix} a_{ij} = a_{ji} \\ a_{ii} = 2 \\ a_{ij} \le 0 \end{smallmatrix}\right)$

On s'intéresse à l'algèbre enveloppante quantique associée à l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$. Plus précisement, à la partie (strictement) positive

$U_v^+(\mathfrak{g})$. Par définition, il s'agit de l'algèbre engendrée par E_i, $i \in I$ et les relations de Serre quantiques. (32)

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ l \end{bmatrix} E_i^l E_j E_i^{1-a_{ij}-l} = 0 \qquad i \neq j.$$

Pour $q=1$ et A une matrice de Cartan associée à un diagramme de Dynkin, on reconnait l'algebre enveloppante $U(n^+)$, où n^+ est la sous-algèbre nilpotente maximal de $\mathfrak{g}$.

~~On admettra le Theoreme de Poincaré Birkhoff Witt~~.

2.2 Le Theoreme principal.

Théoreme : Soit Q un carquois sans boucles, soit c_{ij}, $i \neq j$ le nombre d'arêtes de i à j. On note $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ la matrice de Cartan telle que $a_{ii} = 2$ $a_{ij} = a_{ji} = -c_{ij} - c_{ji}$, $i \neq j$. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Kac Moody associée à A. Alors on a une injection :

$$\begin{aligned} \Psi : U_v^+(\mathfrak{g}) &\longrightarrow H_Q \\ E_i &\longmapsto [S_i] \end{aligned}$$

Preuve : Il suffit de montrer que dans H_Q la relation de Serre quantique :

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ l \end{bmatrix} [S_i]^l [S_j] [S_i]^{1-a_{ij}-l} = 0$$

est vérifiée.

Posons $[S_i]^{(l)} := \dfrac{[S_i]^l}{[l]!}$ de sorte à ce que ce soit equivalent à

$$\sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l [S_i]^{(l)} [S_j] [S_i]^{1-a_{ij}-l} = 0$$

Dans un premier temps on a :

$$[S_i]^{(\ell)}[S_j] = \nu^{\ell(\ell-1)-\ell r}\sum_{M\in I_1}[M], \quad \text{où } r = c_{ij}$$

où $I_1 = \{M, \exists N \subset M \text{ tq } N \simeq S_j, \; M/N \simeq S_i^{\oplus \ell}\}$

Effectivement, on a $[S_i]^{(\ell)} = [S_i^{\oplus \ell}]\,\nu_+^{\ell(\ell-1)}$

et les modules M sont tels que la suite :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & k & \xrightarrow{\sim} & k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & : j \\
 & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow \varphi_\ell^o & & \uparrow\downarrow_\ell & & & \\
0 \to & 0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k^\ell & \longrightarrow & 0 & : i \\
 & & & \ddot{M} & & & & &
\end{array}$$

est exacte. Notons que dans ce cas l'image de S_j dans M est unique et notons que les c_{ji} flèches α_{ji}^M sont nulles.

Maintenant on a :

$$[S_i]^{(\ell)}[S_j][S_i]^{(n)} = \nu^{-nS-\ell r+n\ell+\ell(\ell-1)+n(n-1)}\sum_{[L]} P_L\,[L]$$

où $P_L = 0$ sauf si $V_L = \sum_{j\to i} \mathrm{Im}\,\alpha_{ji}^L \subset \bigcap_{i\to j} \mathrm{Ker}\,\alpha_{ij}^L = U_L$

Dans ce cas, on a : $P_L = \# \mathrm{Gr}_{n-v_L,\,u_L-v_L} = \nu^{(u_L-n)(n-v_L)}\begin{bmatrix} u_L - v_L \\ n - v_L \end{bmatrix}$

où $u_L = \dim U_L$, $v_L = \dim V_L$.

Il suffit pour voir cela d'observer la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k & = & k & \longrightarrow & 0 & \\
 & \uparrow\downarrow_n & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow_\ell^o & & & \\
0 \longrightarrow & k^n & \xrightarrow{f} & k^{n+\ell} & \longrightarrow & k^\ell & \longrightarrow & 0. & \\
 & & & \ddot{L} & & \ddot{M} & & &
\end{array}$$

Une CNS pour que les flèches commutent (et que la suite soit exacte) est : ~~Im~~ $f(k^n) \subset U_L$, $V_L \subset f(k^n)$ et $\dim f(k^n) = n$.

Donc $f(k^n)$ peut être choisi quelconque de dimension n et tel que $V_L \subset f(k^n) \subset U_L$. Ces ensembles sont en bijection par $E \longmapsto E/V_L$ avec ~~les sous-spa~~ l'ensemble des sous-espaces de U_L/V_L de dimension $n - v_L$.

34

Posons $s = c_{ji}$, $t = c_{ij} + c_{ji} = r + s = -a_{ij}$

Il vient : $$\sum_{l=0}^{t+1} (-1)^l [S_i]^{(l)} [S_j] [S_i]^{(n)}$$

$$= \sum_{L, V_L \subset U_L} \left(\sum_{l=0}^{t+1} (-1)^l v^{-ns - lr + nt + l(l-1) + n(n-1) + (u_L - n)(n - v_L)} \begin{bmatrix} u_L - v_L \\ n - v_L \end{bmatrix} \right) [L]$$

$$= \sum_{L} v^{(t+1)s - u_L v_L} \left(\sum_{n=0}^{t+1} (-1)^{t+1-n} v^{-(2s+1-u_L-v_L)n} \begin{bmatrix} u_L - v_L \\ n - v_L \end{bmatrix} \right) [L]$$

Or une formule combinatoire quantique donne : $\sum_{n=0}^{m} (-1)^n v^{-dn} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = 0.$

On admet que cette formule marche et donne.

$$\sum_{l=0}^{t+1} (-1)^l [S_i]^{(l)} [S_j] [S_i]^{(t+1-l)} = 0.$$

$\square$

Corollaire : Si Q est de type Dynkin, on a un isomorphisme

$$U_v(n^+) \simeq H_Q$$

En particulier :

$$U(n^+) \simeq H_Q |_{q=1}$$ (on peut poser $q = 1$ car les cstes de structure sont polynomiales)

A - MODULES ET ALGEBRE HOMOLOGIQUE

I A - MODULES. GENERALITES.

A est une k-algèbre sur un corps k quelconque.

<u>Complexe</u> : Un complexe C_* de A-modules est une famille $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de A-modules munie de morphismes de A-modules $d = d_n : C_n \to C_{n-1}$ tels que $d\circ d : C_n \to C_{n-2}$ est nul.

Le noyau de d_n est appelé <u>n-cycle</u> de C_* et noté $Z_n(C_*)$.
L'image de d_{n+1} est appelée <u>n-bord</u> de C_* et notée $B_n(C_*)$
Le n-ième module de <u>(co)homologie</u> de C_* est le quotient

$$H_n(C_*) = Z_n(C_*)/B_n(C_*)$$

Si $H_n(C_*) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$, le complexe sera dit <u>exact</u>. On dit aussi "<u>suite exacte</u>".

La suite exacte

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$ est appelée

<u>suite exacte courte</u>. Elle exprime que N est le quotient de M par K (K étant identifié à son image dans M).

Soit $0 \to K \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$ une suite exacte de A-modules. On dit que la suite exacte courte est scindée si une des conditions équivalentes est vérifiée

(i) π possède une section s, ie un morphisme de modules tq
$$\pi s = 1\!\!1_N$$

(ii) ι possède une retraction r, ie un morphisme de modules tq
$$r \iota = 1\!\!1_K$$

(iii) On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\wr"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & K \oplus N \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Où la suite exacte du bas est la suite naturelle.

Rem : Si A est un corps toute suite exacte courte est scindée en dimension finie, c'est le théorème de la base incomplète.

Lorsque A n'est pas un corps, ce n'est pas le cas en général, on a alors une distinction entre module simple et module indécomposable.

Def : Un module M est dit simple si $N \underset{A\text{-mod}}{\subset} M \Rightarrow N = M$ ou 0

Un module M est dit indécomposable si $M = N \oplus K \Rightarrow N = 0$ ou $K = 0$

Un grand classique :

<u>THEOREME DE KRULL-SCHMIDT</u> : Tout A-module de dimension finie sur k se décompose en une somme de A-modules indécomposables, unique à isomorphisme et permutation près.

On repère souvent les indécomposables grâce au

<u>Lemme de FITTING</u> : Soit M un A-module de dimension finie sur k. Alors M est indécomposable ssi $\mathrm{End}_A M$ est une algèbre locale, ie ssi $B = \mathrm{End}_A M$ possède un unique idéal maximal bilatère, ssi ses éléments non inversibles forment un idéal.

II MODULES PROJECTIFS

Un module P est <u>projectif</u> si l'existence du morphisme en pointillé est assurée

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl, dashed] & \\ X \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Exemple : Un module libre est projectif (on prend A^n, mais on peut prendre A^I)

$$\begin{tikzcd} & A^n \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & \\ X \arrow[r, "\pi"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Pour cela, construisons un morphisme g. On prend la base naturelle $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ du A-module libre A^n. Comme π est surjective, on choisit un antécédent x_i à $f(e_i)$ pour tout i et on considère g telle que $g(e_i) = x_i$, $\forall i$. Le morphisme g est unique et vérifie $\pi g = f$.

PROPOSITION : Un module P est projectif ssi c'est un facteur direct d'un module libre.

Preuve : $\Longleftarrow$: On suppose $P \oplus Q = A^I$ comme A-module. Construisons g dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On construit d'abord $\bar{f} : A^I \to M$ par prolongement en zero sur Q puis $\bar{g}$ comme dans l'exemple qui précède et $g = \bar{g}_{|P}$.

$\Longrightarrow$ On suppose P projectif. Comme P possède une partie génératrice, on a un morphisme surjectif de A-mod : $A^I \to P \to 0$

Soit K son noyau.

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d, equal] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & A^I \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$ car P projectif.

Ceci prouve que la suite exacte courte est scindée.

$$A^I = P \oplus K. \qquad \square$$

On définit aussi les modules injectifs par la propriété :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[dl, dashed] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Attention : Un module libre n'est pas trop injectif.

III CATEGORIES ET FONCTEURS

<u>DEF.</u> Une <u>Catégorie</u> consiste en des <u>objets</u> et des morphismes pour chaque paire d'objets. L'"ensemble" des objets sera noté $Obj(\mathcal{C})$ et l'ensembles des morphismes de A vers B sera noté $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$. On veut de plus que soient verifiés les axiomes :

(i) $\exists \; Id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ (identité)

(ii) $\exists$
$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (f \; , \; g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$
(composition)

(iii) $Id_B \circ f = f = f \circ Id_A$ pour $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ (unité)

(iv) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ associativité.

<u>DEF:</u> Un <u>foncteur</u> $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ entre deux catégories est une application qui associe à un objet C de $\mathcal{C}$ un objet FC de $\mathcal{D}$. De plus il associe à tout morphisme $f \in Hom_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ un morphisme $Ff \in Hom_{\mathcal{D}}(FC_1, FC_2)$. On veut que soient verifiés les axiomes :

(i) $F(id_C) = id_{FC}$

(ii) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (foncteur <u>covariant</u>)

[(ii) bis $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ (foncteur <u>contravariant</u>)
avec $Ff \in Hom_{\mathcal{D}}(FC_2, FC_1)$.]

<u>Exemple</u> : A-mod est la catégorie des A-modules de dimension finie sur k. Les morphismes sont les morphismes de A-modules.
En part., k-ev est la catégorie des k-ev de dim. finie. Soit M un A-mod
$F = Hom_A(M, -) : A\text{-mod} \longrightarrow k\text{-ev}$ est un foncteur covariant

Si $f : C_1 \to C_2$ est un morphisme de A-modules

Alors $Ff : \mathrm{Hom}_A(M, C_1) \to \mathrm{Hom}_A(M, C_2)$

$$g_1 \longmapsto g_2 = f \circ g_1$$

$G = \mathrm{Hom}_A(-, M) : A\text{-mod} \to k\text{-ev}$ est un foncteur contravaria

Si $f : C_1 \to C_2$ est un morphisme de A-modules

Alors $Gf : \mathrm{Hom}_A(C_2, M) \to \mathrm{Hom}_A(C_1, M)$

$$g_2 \longmapsto g_1 = g_2 \circ f$$

IV Extensions

Soit M un A-module, une résolution projective de M est un complexe exact de A-modules

$$\cdots \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0, \text{ où}$$

les P_i sont projectifs.

Soit N un A-module.

En appliquant le foncteur contravariant $\overset{F}{\overset{\shortparallel}{\mathrm{Hom}_A}}(-, N)$, on obtient un complexe (en gral non exact).

$$FP_0 \xrightarrow{Fd_1} FP_1 \to \cdots \to FP_{n-1} \xrightarrow{Fd_n} FP_n \to \cdots$$

$\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ est par définition l'homologie $\mathrm{Ker}\, Fd_{n+1} / \mathrm{Im}\, Fd_n$ de ce complexe. $\mathrm{Ext}^0_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$. A partir d'un morphisme $f : M_1 \to M_2$ on construit un morphisme entre les résolutions proj. de M_1 et M_2, puis un morphisme $\mathrm{Ext}^n_A(f, N)$ entre $\mathrm{Ext}^n(M_2, N) \to \mathrm{Ext}^n(M_1, N)$. Donc $\mathrm{Ext}^n(-, N)$ est un foncteur.

Remarques :

1. On peut tjrs trouver une résolution projective à un module, même si elle doit être infinie.

2. La définition de $Ext^n_A(M,N)$ ne dépend pas de la résolution projective choisie.

3. On obtient le même $Ext^n_A(M,N)$ en appliquant $Hom_A(M,-)$ à une résolution injective de N :

$$0 \to N \to I_0 \to I_1 \to \cdots$$

SUITE EXACTES LONGUES :

On peut souvent obtenir des renseignements sur les "ext" en appliquant le résultat qui suit. On notera $(L,M)^n = Ext^n(L,M)$ et $(L,f)^n = Ext^n(L,f)$ ...

La suite exacte courte

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

donne après application du foncteur $Hom(L,-)$ la suite exacte longue.

$$0 \to (L,K)^0 \to (L,M)^0 \xrightarrow{(L,g)^0} (L,N)^0 \xrightarrow{\delta_1} (L,K)^1 \xrightarrow{(L,f)^1} (L,M)^1 \xrightarrow{(L,g)^1} (L,N)^1 \xrightarrow{\delta_2} (L,K)^2 \to \cdots$$

où les δ_i sont des morphismes de connection.

De même, après application du foncteur $Hom(-,L)$, on obtient :

$$0 \to (N,L)^0 \xrightarrow{(L,g)^0} (M,L)^0 \xrightarrow{(L,f)^0} (K,L)^0 \xrightarrow{\delta_1} (N,L)^1 \xrightarrow{(L,g)^1} (M,L)^1 \to (K,L)^1 \xrightarrow{\delta_2} \cdots$$

Remarque : le mot "extension" vient du fait que $Ext^1(N,M)$ mesure en quelque sorte le nombre de modules E tels que l'on ait une suite exacte

$$0 \to M \longrightarrow E \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

Ces modules E sont des extensions de N (par M). Par exemple l'extension nulle dans $Ext^1(N,M)$ correspond au module $E = M \oplus N$.
Voir l'Exercice 3, FICHE 2 pour une construction explicite quand $A = kQ$.

BIBLIOGRAPHIE

- Pour une approche très détaillée et en français (!), correspondant à un cours de M1
  "ALGEBRES ET MODULES" de Ibrahim ASSEM chez MASSON.
- Pour une approche pedagogique et plus complète
  "A COURSE IN HOMOLOGICAL ALGEBRA" de P.J. HILTON et U. STAMMBACH.
  (SPRINGER-VERLAG).
- La totale :
  "An INTRODUCTION TO HOMOLOGICAL ALGEBRA", C.A. WEIBEL, Cambridge studies in advanced math.