Université Claude Bernard Lyon 1

Formule de Black-Scholes

Derom Marie
Licence de mathématiques
Année universitaire 2016/2017

Je voudrais remercier M. Christophe Poquet, mon encadrant pendant ce projet, pour son oreille attentive et la pédagogie de ses remarques.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Dans un premier temps, nous allons expliquer ce qu'est un marché financier (cf. référence [3]). Puis nous développerons le modèle de Black-Scholes en temps discret et continu.

Un marché financier se construit par différents types de produits financiers, comme ceux qui vont nous intéresser ici : l'actif risqué, l'actif sans risque, l'option d'achat et l'option de vente.

Actif risqué (aussi appelé action) : il s'agit d'un capital dont le prix fluctue au cours de temps. Par exemple, on note S_t le prix d'une action au temps t. Pour simplifier, nous supposerons qu'à l'instant $t + \Delta t$ suivant, le prix fluctue de façon à ne pouvoir prendre que deux valeurs. Ainsi l'on a :

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} u \times S_t \\ d \times S_t \end{cases} .$$

Les paramètres u et d sont connus : $u > 1$ donne un prix en hausse (l'action a grimpé), tandis que $d < 1$ donne un prix en baisse (l'action a baissé).
Ce modèle d'évolution est évidemment simplifié car on le répète d'une unité de temps à une autre, mais aussi parce que l'on fait l'hypothèse que $S_{t+\Delta t}$ a la possibilité de ne prendre seulement que 2 valeurs (uS_t ou dS_t).

Actif sans risque : son principe est fondé sur le placement d'une somme d'argent dans un compte épargne, qui assure l'apport d'un intérêt $r < 1$ sur une période d'une unité de temps Δt (par exemple, si r est sur une période d'un an, alors il correspond à l'intérêt annuel). Ainsi si le compte possède C_0 € au temps $t = 0$, alors il y aura au temps $t = T$:

$$C_T = C_0(1 + r)^{T/\Delta t},$$

cf. la preuve (A.1.1).

L'option d'achat (*call* européen) : il s'agit du produit financier au coeur du modèle de Black-Scholes. L'option d'achat est un contrat entre le vendeur (qui peut être une institution financière, par exemple) et l'acheteur d'actions (un particulier, par exemple). Ce contrat consiste à donner le droit à l'acheteur, et non pas l'obligation, d'acheter une action à une date fixée T (appelée l'échéance, ou encore la maturité) et au prix convenu K (appelé le *strike*). Naturellement, l'acheteur le fera s'il obtient un bénéfice.
Cependant, cette option doit être préalablement achetée par l'acheteur. Le prix de cette option est appelée la *prime* que l'on notera x. Elle est versée par l'acheteur au moment de la signature du contrat. De plus, lorsque l'acheteur détient l'action, il la revend immédiatement au prix du marché S_T. On comprend donc que l'acheteur a un bénéfice seulement si $K < S_T - x$.

Option de vente (*put* européen) : il s'agit d'un contrat dans lequel le vendeur s'engage, auprès de l'acheteur, à lui acheter une action au prix convenu du *strike* K, à l'échéance fixé T, selon une condition : l'acheteur doit avoir un bénéfice. Or l'acheteur a un bénéfice lorsque le prix du *strike* est supérieur à $S_T + x$. En effet, l'acheteur ne détient pas l'action lors de la signature du contrat, il l'achètera à la date de l'échéance T, au prix du marché S_T, afin d'immédiatement la vendre au prix K au vendeur. De plus, ce contrat lui coûte x € (comme l'option d'achat). Il aura alors dépensé $S_T + x$ €, ce qui explique qu'il aura un bénéfice seulement si $K > S_T + x$.

Remarque 1.0.1. Ces options sont dites *européennes* car le contrat ne peut être effectué qu'à l'échéance T. Il existe des options dites *américaines* dont le contrat peut s'exécuter à toute date entre l'instant $t = 0$ et l'échéance T.

Afin de concrétiser les concepts introduits et de comprendre l'utilité de la formule de Black-Scholes, nous allons prendre un exemple simple pour chacune des options que nous allons ensuite analyser.

Exemple* 1.1. *de l'option d'achat
Soit une action A de valeur $S_0 = 22$€ détenue par un organisme financier. Vous lui proposez d'acheter le droit d'acheter A dans 6 mois à 20€ (on a donc $K = 20$). L'organisme financier accepte et fixe le prix de l'option à 2€ (la prime $x = 2$). Vous êtes donc l'acheteur et lui, le vendeur.

— Si A a grimpé de 3€ au bout de 6 mois (donc $S_T = 25$), nous avons $K < S_T - x$ puisque $K = 20$ et $S_T - x = 23$. Vous allez donc utiliser l'option, car vous avez un bénéfice de $(S_T - x) - K = 3$€. Cependant, le vendeur serait perdant puisqu'il aura reçu $K + x = 22$€ alors que son action en vaut $S_T = 25$€. Ceci montre alors qu'il est crucial pour le vendeur d'adopter une stratégie de placement pour la prime x, afin de combler ce déficit.

— En revanche, si A a baissé de 3€ au bout de 6 mois (donc $S_T = 19$), nous avons $K > S_T - x$ puisque $K = 20$ et $S_T - x = 17$. Vous n'allez donc pas utiliser l'option, ce qui fait que vous perdez la prime de 2€ versée au temps $t = 0$. Du côté du vendeur, s'il n'a pas suivi de stratégie de placement pour x, il aura alors simplement un bénéfice égal à 2€. Ou bien, son bénéfice sera égal au devenir de la prime, suite à sa stratégie de placement.

Exemple* 1.2. *de l'option de vente
Soit une action B de valeur $S_0 = 45$€ détenue par une banque. Vous proposez à un organisme financier d'acheter un contrat dans lequel il s'engage à vous acheter B dans 2 ans pour 50€ (ainsi $K = 50$), sous une seule condition : lorsque $K > S_T + x$, autrement dit lorsque le prix de l'action dans 2 ans est inférieur à $K - x$. L'organisme financier accepte et fixe le prix du contrat à 4€. Vous êtes l'acheteur et lui, le vendeur.

— Si B a baissé de 3€ au bout de 2 ans, nous avons S_T inférieur à $K - x = 46$€ (puisque $S_T = 42$). Sachant que le vendeur va tenir sont engagement, vous achetez l'action à la banque au prix du marché : vous dépensez alors 42€. Puis le vendeur vous achète cette action, comme convenu, au prix du *strike* : vous recevez 50€. Sans oublier la prime que vous avez versée au temps $t = 0$, vous avez un bénéfice de $K - S_T - x = 4$€. Cependant, le vendeur est perdant puisqu'il paye 50€ une action qui en vaut 42, pour un montant de 4€. En effet, $42 + 4 - 50 = -4$. On comprend ainsi qu'il faudrait que le vendeur ait placé judicieusement la prime au temps $t = 0$ afin de ne pas perdre ces 4€, au temps $t = 2$ ans.

— Si B a grimpé de 3€, le prix de B à l'échéance $T = 2$ ans est donc supérieur à $K - x = 46$€ (puisque $S_T = 48$). Vous savez que le vendeur ne vous achètera pas B, puisque vous n'allez pas faire de bénéfice. Vous n'achetez donc pas B à la banque, ce qui fait que vous perdez le montant de la prime versée au temps $t = 0$. Et le vendeur aura un bénéfice, soit égal à 4€ s'il a pris le risque de ne suivre aucune stratégie de placement pour x, soit égal au devenir de x au temps T.

Analyse des exemples
On voit que la situation du vendeur ne suivant aucune stratégie de placement, pour les deux options, n'est pas avantageuse puisqu'il risque de perdre beaucoup (si l'acheteur obtient un bénéfice) alors qu'il ne peut pas gagner plus que le montant de la prime. Comme vu précédemment, on comprend qu'il faudrait que le vendeur adopte une stratégie de placement pour la prime afin d'être presque sûr de ne rien perdre, ce qui pourra le pousser à signer le contrat. Grâce aux exemples, on voit qu'il serait parfait que la stratégie

de placement du vendeur lui permette d'obtenir au temps T dans son portefeuille, le montant $(S_T - K)$ pour l'option d'achat et $(K - S_T)$ pour l'option de vente, dans la situation où l'acheteur obtient un bénéfice (c'est-à-dire, lorsque $K < S_T - x$ dans le cas d'un *call*, et $K > S_T + x$ dans le cas d'un *put*). En effet, si c'est bien le cas, lorsqu'il vend ou achète l'action au prix K, c'est comme s'il l'avait vendue ou achetée au prix S_T.

Remarque 1.0.2. Lorsque l'acheteur obtient un bénéfice, cette différence est positive pour les deux options car, pour l'option d'achat, on a $K < S_T - x \Rightarrow S_T > K$ (puisque $x > 0$), et pour l'option d'achat, on a $K > S_T + x \Rightarrow K > S_T$ (puisque $x > 0$).

Utilité de la formule de Black-Scholes

La formule de Black-Scholes permet justement d'obtenir dans son portefeuille, au temps T, cette différence positive entre S_T et K. Elle donne effectivement toutes les informations nécessaires pour suivre une stratégie appelée la ***stratégie de couverture***, qui consiste à placer régulièrement une partie de son portefeuille dans l'actif risqué, et l'autre partie dans l'actif sans risque. La formule de Black-Scholes renseigne donc le montant à placer dans l'actif risqué en fonction du temps, et le montant adéquat de la prime.

Néanmoins, cette formule ne dissocie pas les mêmes situations étudiées précédemment (celle dans laquelle l'acheteur obtient un bénéfice, et celle dans laquelle, il n'en obtient pas). Si le vendeur décide d'utiliser cette formule, il aura quelle que soit ces deux situations, la différence positive entre S_T et K. Ainsi, lorsque l'acheteur n'obtient pas de bénéfice, le vendeur n'aura pas nécessairement le montant de la prime dans son portefeuille. En effet :

— Pour l'option d'achat, si l'acheteur n'obtient pas de bénéfice, alors $K > S_T - x \Rightarrow S_T < K$ ou bien $K < S_T < K + x$. Dans la première situation, le portefeuille du vendeur s'élève à 0€ puisque $S_T - K$ est négatif. Dans la seconde situation, il s'élève à $S_T - K$€ qui ne vaut pas nécessairement x.

— Pour l'option de vente, si l'acheteur n'obtient pas de bénéfice, alors $K < S_T + x \Rightarrow S_T > K$ ou bien $K - x < S_T < K$. Ainsi, le portefeuille du vendeur s'élève soit à 0€ puisque $K - S_T$ est négatif, soit à $K - S_T$€ qui ne vaut pas nécessairement x.

Par conséquent, la formule de Black-Scholes dissocie les deux situations suivantes : celle dans laquelle la différence entre S_T et K est négative, et celle dans laquelle, elle est positive.

Fonctions *payoff*

Afin de bien comprendre le problème résolu par la formule de Black-Scholes, nous allons introduire une fonction pour chaque option, qui correspond au montant désiré dans le portefeuille, donné à partir de S_T : la fonction f_c, pour l'option d'achat et la fonction f_p, pour l'option de vente, telles que :

$$\begin{aligned} f_c : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ s &\mapsto \max(0, s - K) = (s - K)_+ \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} f_p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ s &\mapsto \max(0, K - s) = (K - s)_+ \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ainsi, si l'on appelle X_t, le montant du portefeuille du vendeur au temps t, alors le problème résolu par la formule de Black-Scholes est le suivant :

Quel est le bon montant de la prime x afin que $X_T = f_c(S_T)$ dans le cas d'un *call*, et $X_T = f_p(S_T)$ dans le cas d'un *put* ? (1.3)

Chapitre 2

Formule de Black-Scholes en temps discret

Nous allons ici étudier l'évolution en temps discret du portefeuille du vendeur, qui a décidé de suivre la stratégie de couverture. Puis nous en déduirons le bon montant de la prime, afin que l'objectif soit rempli. En temps discret, nous avons l'échéance T du contrat qui est divisé en T pas de temps, de taille 1. Pour faciliter la rédaction, on pose la fonction f telle que $f \in \{f_c, f_p\}$.

2.1 Modélisation du problème

Le vendeur aimerait suivre la stratégie de couverture, pour que le montant X_0 de son portefeuille au temps $t = 0$ (qui est constitué de la prime x) devienne au temps T égal à $f(S_T)$. À chaque instant t, il placera une certaine partie Z_t de son portefeuille dans l'actif risqué, et l'autre partie $(X_t - Z_t)$, dans l'actif non risqué. Nous allons donc modéliser certains paramètres des deux actifs, pour étudier l'évolution de Z_0 et de $(X_0 - Z_0)$.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, on sait que Z_t peut prendre au pas de temps suivant, deux valeurs : $u \times Z_t$ (en cas de hausse) ou $d \times Z_t$ (en cas de baisse). Ainsi l'on comprend qu'il existe une probabilité d'obtenir une hausse de l'actif risqué et une baisse. Plus formellement, Z_t est une variable aléatoire telle que :

$$Z_t = Z_{t-1} \times \xi_t,$$

avec $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, une famille de variable aléatoire i.i.d (indépendantes et identiquement distribuées), à valeurs dans $\{u, d\}$ et de paramètre p. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\xi_t = k) = \begin{cases} p & \text{si } k = u, \\ 1 - p & \text{si } k = d. \end{cases}$$

Remarques 2.1.1.

— La famille $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ regroupe des variables aléatoires qui correspondent à des transformations d'une variable aléatoire de Bernoulli $B \sim \mathcal{B}(p)$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\xi_k = \mathcal{B} \cdot u + (1 - \mathcal{B}) \cdot d.$$

— Nous ne pouvons pas écrire que $Z_t = Z_0 \times \xi_1 \times \cdots \times \xi_t$, puisque la stratégie de couverture repose sur la modification régulière du montant placé dans l'actif risqué et sans risque.

— Le prix de l'action S_t au temps t suit également cette fluctuation. Ici, nous pouvons bien écrire que $S_t = S_0 \times \xi_1 \times \cdots \times \xi_t$.

Étudions désormais la somme $(X_0 - Z_0)$ placée en caisse d'épargne (actif sans risque). On note r, le taux d'intérêt sur une unité de temps $\Delta t = 1$ (puisque nous sommes en temps discret). Nous avons, selon la propriété A.1.1 :

$$(X_t - Z_t) = (X_{t-1} - Z_{t-1}) \times (1 + r).$$

Pour simplifier l'expression, on pose $\alpha = 1 + r$. Donc :

$$(X_t - Z_t) = (X_{t-1} - Z_{t-1}) \times \alpha.$$

Remarque 2.1.2. De la même manière que précédemment, nous ne pouvons pas écrire que

$$(X_t - Z_t) = (X_0 - Z_0) \times (1 + r)^t,$$

puisque la stratégie de couverture consiste à changer régulièrement la somme placée dans l'actif risqué et non risqué.

Comme nous voyons clairement que $X_t = (X_t - Z_t) + Z_t$, nous pouvons désormais dire que le portefeuille du vendeur au temps t est égal à :

$$\begin{aligned} X_t &= (X_{t-1} - Z_{t-1}) \times \alpha + Z_{t-1} \times \xi_t \\ &= X_{t-1}\alpha + Z_{t-1}(\xi_t - \alpha). \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2 Démarche de résolution

Nous savons que l'objectif principal est de déterminer X_0 tel que $X_T = f(S_T)$. Ainsi, nous allons appliquer une itération inversée (partir du temps $t = T$, pour arriver au temps $t = 0$). Cependant, pour effectuer cette itération, il faut encore préciser la stratégie de placement du vendeur, ce qui revientà déterminer non seulement X_t mais aussi Z_t. Nous pouvons suivre un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ pour démontrer la propriété suivante :

$$\begin{cases} Z_{T-n} = \dfrac{(\phi^{n-1} f)(S_{T-n}\, u) - (\phi^{k-1} f)(S_{T-n}\, d)}{\alpha^{n-1}(u - d)}, \\ \\ X_{T-n} = \dfrac{1}{\alpha^n}(\phi^n f)(S_{T-n}), \end{cases} \tag{2.2}$$

avec :

$$(\phi^n f)(s) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \frac{(u - \alpha)^{n-l}(\alpha - d)^l}{(u - d)^n} f(s\, d^{n-l}\, u^l). \tag{2.3}$$

Par conséquent, voici les étapes que nous allons suivre :

1. Initialisation de la propriété par le calcul de Z_{T-1} et X_{T-1},
2. Démonstration de l'hérédité de la propriété par le calcul de $Z_{T-(k+1)}$ et $X_{T-(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$,
3. Calcul de X_t et Z_t, $\forall t \in \mathbb{N}$ ce qui nous permettra d'établir X_0.

2.3 Résolution du problème

Initialisation de la propriété

Système à résoudre
Actuellement, selon le problème énoncé (cf. (1.3)), nous voulons que :

$$X_T = f(S_T).$$

Cependant nous savons, grâce à la remarque 2.1.1, que $S_T = S_{T-1} \cdot \xi_T$. Donc, autrement dit, nous voulons que :

$$X_T = f(S_{T-1}\xi_T).$$

De plus, selon précédemment (cf. (2.1)) nous avons :

$$X_T = X_{T-1}\alpha + Z_{T-1}(\xi_T - \alpha).$$

En réunissant ces deux équations, nous avons :

$$X_{T-1}\alpha + Z_{T-1}(\xi_T - \alpha) = f(S_{T-1}\xi_T).$$

Or ξ_T est à valeurs dans $\{u, d\}$, nous devons alors dissocier ces deux cas. Ce qui implique le système suivant :

$$\begin{cases} X_{T-1}\,\alpha + Z_{T-1}(d - \alpha) = f(S_{T-1}\,d), & (2.4)\\ X_{T-1}\,\alpha + Z_{T-1}(u - \alpha) = f(S_{T-1}\,u). & (2.5)\end{cases}$$

Calcul de Z_{T-1}
Afin de trouver Z_{T-1}, nous devons soustraire (2.4) à (2.5) :

$$\begin{aligned} f(S_{T-1}\,u) - f(S_{T-1}\,d) &= X_{T-1}\,\alpha + Z_{T-1}(u-\alpha) - X_{T-1}\,\alpha + Z_{T-1}(d-\alpha)\\ &= Z_{T-1}\big[(u-\alpha) - (d-\alpha)\big]\\ &= Z_{T-1}(u-d). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons l'expression de Z_{T-1} :

$$Z_{T-1} = \frac{f(S_{T-1}\,u) - f(S_{T-1}\,d)}{(u-d)}.$$

Nous remarquons qu'elle vérifie bien la première équation de la propriété (2.2) pour $n = 1$.

Calcul de X_{T-1}
L'expression de X_{T-1} se détermine en réalisant cette combinaison linéaire :

$$(2.4) \cdot (u - \alpha) + (2.5) \cdot (\alpha - d).$$

Pour alléger la présentation, on pose $A = (u - \alpha)$ et $B = (\alpha - d)$. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} A \cdot f(S_{T-1}\,d) + B \cdot f(S_{T-1}\,u) &= X_{T-1}\,\alpha \cdot A + Z_{T-1} \cdot (-B) \cdot A + X_{T-1}\,\alpha \cdot B + Z_{T-1} \cdot A \cdot B\\ &= X_{T-1}\alpha \cdot (A+B) + Z_{T-1} \cdot A \cdot (-B+B)\\ &= X_{T-1}\alpha \cdot (A+B). \end{aligned}$$

En remplaçant A et B par leur expression :

$$\begin{aligned} (u-\alpha)f(S_{T-1}\,d) + (\alpha-d)f(S_{T-1}\,u) &= X_{T-1}\,\alpha\big[(u-\alpha) + (\alpha-d)\big]\\ &= X_{T-1}\,\alpha(u-d). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons l'expression de X_{T-1} :

$$X_{T-1} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{u-\alpha}{u-d} f(S_{T-1}\,d) + \frac{\alpha-d}{u-d} f(S_{T-1}\,u)\right).$$

Nous pouvons également remarquer qu'elle vérifie bien la seconde équation de la propriété (2.2) pour $n = 1$.

Conclusion
Nous avons alors initialisé la propriété (2.2), il reste à prouver son hérédité. Cependant on peut s'apercevoir, grâce à l'expression de X_{T-1}, que :

$$\frac{\alpha-d}{u-d} = 1 - \frac{u-\alpha}{u-d}.$$

Ceci nous pousse alors à penser à la formule de transfert A.2.3 d'une variable aléatoire à valeurs dans $\{u, d\}$ dont la probalité de u est $\frac{\alpha-d}{u-d}$ et celle de d est $\frac{u-\alpha}{u-d}$.
Posons $q = \frac{\alpha-d}{u-d}$. On a alors :

$$X_{T-1} = \frac{1}{\alpha}\big((1-q) \times f(S_{T-1}\, d) + q \times f(S_{T-1}\, u)\big).$$

On voit que si on considère la variable aléatoire ξ_T suivant la loi de Bernoulli de paramètre q à valeur dans $\{u, d\}$, et la fonction h telle que :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ X &\mapsto f(S_T X). \end{aligned}$$

En se rappelant que $\mathbb{P}[\xi_T = u] = q$ et $\mathbb{P}[\xi_T = d] = 1 - q$, on a alors :

$$X_{T-1} = \frac{1}{\alpha}\Big[\mathbb{P}[\xi_T = d] \times h(d) + \mathbb{P}[\xi_T = u] \times h(u)\Big].$$

On reconnaît l'espérance de $h(\xi_T) = f(S_{T-1}\xi_T)$.
Cependant, on avait introduit la famille de variables aléatoires $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d de paramètre p, et non q. Afin de distinguer ces deux paramètres, nous introduisons une probabilité superficielle $\mathbb{P}^*$ pour évoquer $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de paramètre q.
On simplifie alors l'expression par :

$$X_{T-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \mathbb{E}^*\Big[f(S_{T-1}\, \xi_T)\Big].$$

Remarque 2.3.1. On peut remarquer que sous la probabilité superficielle $\mathbb{P}^*$, la moyenne de ξ_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ correspond à α, le taux d'intérêt de la caisse d'épargne. En effet, selon la formule de transfert A.2.3, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[\xi_n] &= u \times \mathbb{P}^*[\xi_n = u] + d \times \mathbb{P}^*[\xi_n = d] \\ &= u \times \frac{\alpha - d}{u-d} + d \times \frac{u-\alpha}{u-d} \\ &= \frac{u\alpha - ud + du - d\alpha}{u-d} \\ &= \frac{u\alpha - d\alpha}{u-d} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

La probabilité $\mathbb{P}^*$ est appelée la probabilité neutre de $\mathbb{P}$ (autrement dit, elle est équivalente à$\mathbb{P}$).

Hérédité de la propriété

Système à résoudre
Supposons désormais que le système (2.2) et l'équation (2.3) soient vérifiés à un rang k. Puis, voyons s'il en est de même au rang $k+1$.
Comme précédemment, établissons tout d'abord le système à résoudre. Par définition, nous savons que :

$$X_{T-k} = X_{T-(k+1)}\alpha + Z_{T-(k+1)}(\xi_{T-k} - \alpha).$$

De façon analogue à la partie initialisation, on remplace l'expression de X_{T-k} supposée vraie de la propriété (2.2), nous avons donc :

$$\frac{1}{\alpha^k}(\phi^k f)(S_{T-k}) = X_{T-(k+1)} alpha + Z_{T-(k+1)}(\xi_{T-k} - \alpha).$$

De plus, nous savons que $S_{T-k} = S_{T-(k+1)}\xi_{T-k}$, ainsi :

$$\frac{1}{\alpha^k}(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\xi_{T-k}) = X_{T-(k+1)} alpha + Z_{T-(k+1)}(\xi_{T-k} - \alpha).$$

Désormais, on dissocie les deux valeurs possibles de ξ_{T-k}. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} X_{T-(k+1)}\alpha + Z_{T-(k+1)}(d-\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^k}(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}d), & (2.6) \\ X_{T-(k+1)}\alpha + Z_{T-(k+1)}(u-\alpha) = \dfrac{1}{\alpha^k}(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}u). & (2.7) \end{cases}$$

Calcul de $Z_{T-(k+1)}$
Pour obtenir l'expression de $Z_{T-(k+1)}$, on soustrait (2.6) à (2.7). Pour alléger la présentation, on pose $A = u - \alpha$ et $B = \alpha - d$, par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^k}(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}u) - \frac{1}{\alpha^k}(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}d) &= X_{T-(k+1)}\alpha + Z_{T-(k+1)}A - X_{T-(k+1)}\alpha - Z_{T-(k+1)}(-B) \\ &= Z_{T-(k+1)}(A+B). \end{aligned}$$

On remplace A et B par leur expression :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha^k}(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}u) - \frac{1}{\alpha^k}(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}d) &= Z_{T-(k+1)}\Big((u-\alpha) + (\alpha - d)\Big) \\ &= Z_{T-(k+1)}(u-d). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien l'expression de la première ligne de la propriété (2.2) pour $n = k+1$:

$$Z_{T-(k+1)} = \frac{(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,u) - (\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,d)}{\alpha^k(u-d)}.$$

Calcul de $X_{T-(k+1)}$
Désormais, nous injectons l'expression de $Z_{T-(k+1)}$ dans l'équation (2.6) :

$$\begin{aligned} X_{T-(k+1)}\,\alpha = {} & \frac{(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,d)}{\alpha^k} - \frac{(d-\alpha)\Big[(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,u) - (\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,d)\Big]}{\alpha^k\,(u-d)} \\ = {} & \frac{(u-d)(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,d) - (d-\alpha)\Big((\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,u) - (\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,d)\Big)}{\alpha^k\,(u-d)}. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$X_{T-(k+1)}\,\alpha^{k+1}\,(u-d) = (u-\alpha)(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,d) + (\alpha - d)(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,u).$$

Nous voyons ainsi une somme de 2 termes apparaître :

$T_1 = (u-\alpha)(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,d)$,
$T_2 = (\alpha - d)(\phi^k f)(S_{T-(k+1)}\,u)$.

Nous pouvons remplacer $(\phi^k f)(s)$ par son expression (cf. (2.3)), sans oublier que $s = \begin{cases} S_{T-(k+1)}\,d & \text{pour } T_1 \\ S_{T-(k+1)}\,u & \text{pour } T_2 \end{cases}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} T_1 &= (u-\alpha)\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{(u-\alpha)^{k-l}(\alpha-d)^l}{(u-d)^k} f\Big(S_{T-(k+1)}\,d^{k-l+1}\,u^l\Big) \\ &= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{(u-\alpha)^{k-l+1}(\alpha-d)^l}{(u-d)^k} f\Big(S_{T-(k+1)}\,d^{k-l+1}\,u^l\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= (\alpha-d)\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{(u-\alpha)^{k-l}(\alpha-d)^l}{(u-d)^k} f\Big(S_{T-(k+1)}\,d^{k-l}\,u^{l+1}\Big) \\ &= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{(u-\alpha)^{k-l}(\alpha-d)^{l+1}}{(u-d)^k} f\Big(S_{T-(k+1)}\,d^{k-l}\,u^{l+1}\Big). \end{aligned}$$

Désormais, nous sortons le premier terme de la somme de T_1 et le dernier terme de la somme de T_2 :

$$T_1 \times (u-d)^k = \binom{k}{0}(u-\alpha)^{k+1} f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k+1}\Big) + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l}(u-\alpha)^{k-l+1}(\alpha-d)^l f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k-l+1}\, u^l\Big),$$

$$T_2 \times (u-d)^k = \binom{k}{k}(\alpha-d)^{k+1} f\Big(S_{T-(k+1)}\, u^{k+1}\Big) + \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l}(u-\alpha)^{k-l}(\alpha-d)^{l+1} f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k-l}\, u^{l+1}\Big).$$

Dans la somme T_2, nous procédons au changement de varibable $L = l+1$. On pose $A = u-\alpha$ et $B = \alpha - d$. On a donc :

$$T_2 \times (u-d)^k = \binom{k}{k} B^{k+1} f\Big(S_{T-(k+1)}\, u^{k+1}\Big) + \sum_{L=1}^{k} \binom{k}{L-1} A^{k-L+1} B^L f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k-L+1}\, u^L\Big).$$

Nous remarquons ainsi que la somme figurant dans T_1 correspond à celle dans T_2 au binome près. Lorsque l'on effectue la somme de T_1 et T_2, nous allons donc pouvoir factoriser le contenu de la somme par $\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1}$:

$$\begin{aligned}
T_1 \times (u-d)^k + T_2 \times (u-d)^k =& \binom{k}{0}(u-\alpha)^{k+1} f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k+1}\Big) \\
&+ \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l}(u-\alpha)^{k-l+1}(\alpha-d)^l f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k-l+1}\, u^l\Big) \\
&+ \binom{k}{k} B^{k+1} f\Big(S_{T-(k+1)}\, u^{k+1}\Big) \\
&+ \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell-1} A^{k-\ell+1} B^L f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k-\ell+1}\, u^\ell\Big) \\
=& \binom{k}{0}(u-\alpha)^{k+1} f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k+1}\Big) \\
&+ \sum_{\ell=1}^{k} \left[\binom{k}{\ell} + \binom{k}{\ell-1}\right](u-\alpha)^{k-\ell+1}(\alpha-d)^\ell f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k-\ell+1}\, u^\ell\Big) \\
&+ \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell-1} A^{k-\ell+1} B^L f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k-\ell+1}\, u^\ell\Big).
\end{aligned}$$

Or selon le triangle de Pascal, nous savons que :

$$\binom{k}{\ell} + \binom{k}{\ell-1} = \binom{k+1}{\ell}.$$

De plus, nous avons simplement :

$$\begin{aligned}
\binom{k}{0} &= \binom{k+1}{0} = 1, \\
\binom{k}{k} &= \binom{k+1}{k+1} = 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les deux termes qui ne sont pas dans la somme, peuvent y être intégrés car ils correspondent respectivement aux termes où $\ell = 0$ et $\ell = k+1$. Ainsi :

$$\Big(T_1 + T_2\Big) \cdot (u-d)^k = \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell}(u-\alpha)^{k-\ell+1}(\alpha-d)^\ell f\Big(S_{T-(k+1)}\, d^{k-\ell+1}\, u^\ell\Big).$$

On rappelle que $X_{T-(k+1)}\alpha^{k+1} = \dfrac{1}{u-d}\Big(T_1 + T_2\Big)$, d'où :

$$X_{T-(k+1)}\,\alpha^{k+1} = \sum_{l=0}^{k+1} \binom{k+1}{l} \frac{(u-\alpha)^{k-l+1}(\alpha-d)^l}{(u-d)^{k+1}} f\Big(S_{T-(k+1)}\,d^{k-l+1}\,u^l\Big).$$

Finalement, nous avons bien l'expression recherchée pour $n = k+1$:

$$X_{T-(k+1)} = \frac{1}{\alpha^{k+1}}(\phi^{k+1}f)(S_{T-(k+1)}).$$

Conclusion

La propriété (2.2) est donc initialisée et héréditaire, ce qui signifie qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Réponse au problème

Calcul de X_t et Z_t

On pose $t = T - k$. Ainsi, selon (2.2) :

$$\begin{cases} Z_t = \dfrac{(\phi^{T-t-1}f)(S_t\,u) - (\phi^{T-t-1}f)(S_t\,d)}{\alpha^{T-t-1}(u-d)}, \\[2ex] X_t = \dfrac{1}{\alpha^{T-t}}(\phi^{T-t}f)(S_t). \end{cases}$$

Afin de faciliter les expressions, on pose la fonction suivante :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (t,s) &\mapsto \frac{(\phi^{T-t}f)(s)}{\alpha^{T-t}}. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire plus clairement :

$$\begin{cases} Z_t = \dfrac{F(t+1, S_t u) - F(t+1, S_t d)}{u-d}, \\ X_t = F(t, S_t). \end{cases}$$

Cependant, au vu de la fonction $(\phi^k f)$ (cf. 2.3), il reste encore difficile de bien cerner les valeurs X_t et Z_t. Étudions alors la fonction F, afin de les exprimer à partir des notions que nous connaissons depuis le début du chapitre.

Étude de la fonction F

On remarque que si l'on prend l'expression de la fonction $(\phi^k f)$, et si l'on rappelle que $q = \dfrac{\alpha - d}{u-d}$ et $(1-q) = \dfrac{u-\alpha}{u-d}$, alors on peut écrire que :

$$\begin{aligned} F(t,s) &= \frac{1}{\alpha T - t} \sum_{\ell=0}^{T-t} \binom{T-t}{\ell} \frac{(u-\alpha)^{T-t-\ell}(\alpha-d)^\ell}{(u-d)^{T-t}} f\big(sd^{T-t-\ell}u^\ell\big) \\ &= \frac{1}{\alpha T - t} \sum_{\ell=0}^{T-t} \binom{T-t}{\ell} \left(\frac{u-\alpha}{u-d}\right)^{T-t-\ell} \times \left(\frac{\alpha-d}{u-d}\right)^{\ell} \cdot f\big(sd^{T-t-\ell}u^\ell\big) \\ &= \frac{1}{\alpha T - t} \sum_{\ell=0}^{T-t} \binom{T-t}{\ell} \big(1-q\big)^{T-t-\ell} \times q^\ell \cdot f\big(sd^{T-t-\ell}u^\ell\big). \end{aligned}$$

Ici, on définit une fonction $G_{(t,s)}$ telle que :

$$\begin{aligned} G_{(t,s)} :& \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ & x \mapsto f\big(sd^{T-t-x}u^x\big). \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$F(t,s) = \frac{1}{\alpha T - t} \sum_{\ell=0}^{T-t} \binom{T-t}{\ell} \big(1-q\big)^{T-t-\ell} \times q^\ell \cdot G_{(t,s)}(\ell).$$

On reconnaît alors la formule de transfert A.2.3 de la fonction $G_{(t,s)}(Y_{T-t})$, où Y_{T-t} est une variable aléatoire telle que $Y_{T-t} =$ "le nombre de fois que l'action a grimpé durant une période d'une durée $T-t$". Donc nous avons :

$$F(t,s) = \frac{1}{\alpha T - t} \mathbb{E}\big[G_{(t,s)}(Y_{T-t})\big].$$

Or l'on rappelle que la famille $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est i.i.d. à valeurs dans $\{u,d\}$, de paramètre q sous la probabilité risque neutre. Ainsi, si l'on fixe une période de durée $T-t$, au temps $t=i$ et donc, jusqu'au temps $t = i+T-t$, on a alors :

$$d^{T-t-Y_{T-t}} \cdot u^{Y_{T-t}} = \xi_i \times \cdots \times \xi_{i+T-t},$$

tel qu'il y ait un nombre Y_{T-t} de $\xi_k = u$ et un nombre $(T-t-Y_{T-t})$ de $\xi_k = d$.
Cependant, nous prenons l'espérance de $G_{(t,s)}(Y_{T-t})$, ainsi l'on fait la moyenne de toutes les valeurs possibles de cette fonction ; ce qui revient à calculer la moyenne de toutes les valeurs possibles de $d^{T-t-Y_{T-t}} \cdot u^{Y_{T-t}}$, et donc de $\xi_i \times \cdots \times \xi_{i+T-t}$. Par conséquent :

$$F(t,s) = \frac{1}{\alpha T - t} \mathbb{E}\big[f(s \times \xi_i \times \cdots \times \xi_{i+T-t})\big].$$

Puisque le paramètre t de F est à donner, cela signifie que l'on se trouve au temps t. Ainsi l'on connaît S_t, c'est-à-dire l'ensemble $\{\xi_1, \cdot, \xi_t$. Par conséquent, la période qu'il faut choisir correspond à celle dans laquelle nous ne connaissons pas les ξ_k, autrement dit du temps $t = i+1$ jusqu'au temps $t = T$. Donc, nous avons :

$$F(t,s) = \frac{1}{\alpha T - t} \mathbb{E}\big[f(s \times \xi_{t+1} \times \cdots \times \xi_T)\big].$$

Expression de X_t et Z_t
Maintenant que nous connaissons la fonction F à partir des données initiales du chapitre, nous avons pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} Z_t = \dfrac{1}{\alpha^{T-t-1}(u-d)} \cdot \mathbb{E}^*\Big[f(S_t u \times \xi_{t+2} \times \cdots \times \xi_T) - f(S_t d \times \xi_{t+2} \times \cdots \times \xi_T)\Big], \\ X_t = \dfrac{1}{\alpha^{T-t}} \cdot \mathbb{E}^*\Big[f(S_t \times \xi_{t+1} \times \cdots \times \xi_T)\Big]. \end{cases} \tag{2.8}$$

Calcul de la prime

À partir de l'expression de X_t dans 2.8, on peut déterminer le cas où $t=0$:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{\alpha^T} \cdot \mathbb{E}^*\Big[f(S_0 \times \xi_1 \times \cdots \times \xi_T)\Big] \\ &= \frac{1}{\alpha^T} \cdot \mathbb{E}^*\Big[f(S_T)\Big]. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons exprimer la prime des deux types de contrats. On pose C_0, la prime de l'option d'achat et P_0, celle de l'option de vente. En se rappelant des expressions des fonctions f_c et f_p (cf. (1.1) et (1.2)) :

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\alpha^T} \mathbb{E}^*\Big[(S_T - K)_+\Big], \\ P_0 &= \frac{1}{\alpha^T} \mathbb{E}^*\Big[(K - S_T)_+\Big]. \end{aligned}$$

Nous allons intoduire deux notions qui nous seront utiles dans le prochain chapitre :

1. Le paramètre $\tilde{S_T} = S_T \alpha^{-T/\Delta t}$ (en discret, on rappelle que $\Delta t = 1$),
2. Les fonctions g_c et g_p telles que :

$$g_c = \alpha^{-T/\Delta t} \cdot f_c \quad \text{et} \quad g_p = \alpha^{-T/\Delta t} \cdot f_p.$$

Par conséquent,

— **La prime de l'option d'achat (*call* européen) vaut :**

$$C_0 = \mathbb{E}^*\Big[g_c\big(\tilde{S_T}\big)\Big]. \tag{2.9}$$

— **La prime de l'option de vente (*put* européen) vaut :**

$$P_0 = \mathbb{E}^*\Big[g_p\big(\tilde{S_T}\big)\Big]. \tag{2.10}$$

Chapitre 3

Formule de Black-Scholes en temps continu

Dans ce chapitre, nous allons nous préoccuper du cas continu. Ceci implique que dans un premier temps, on suppose que la durée T est divisée en NT intervalles de taille $\frac{1}{N}$. Par conséquent, les t du cas discret prennent des valeurs dans $\{0, 1/N, \ldots, NT/N\}$. Ensuite, pour obtenir le modèle en continu, il faudra faire tendre N vers $+\infty$ pour réduire la taille des pas de temps.

Puisque le pas de temps n'est plus de taille 1 mais $1/N$, les notations du chapitre précédent vont être modifiées. De plus, nous allons ajouter un exposant (N) aux termes dépendant de cette variable et dont on prendra la limite.
On rapelle que l'objectif est de déterminer la prime x, pour que $X_T = f(S_T)$, avec $f \in \{f_c, f_p\}$. Dans ce chapitre, nous allons nous aider de ce qui a été fait dans le chapitre précédent : les expressions de C_0 et P_0 (cf. 2.9 et 2.10). On comprend qu'il faut déterminer les nouvelles notations des notions suivantes : le terme $\tilde{S_T}$, les fonctions g_c et g_p et le paramètre q de la famille de variables aléatoires $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sous la probabilité risque neutre. Tout ceci nous donneras de nouvelles expressions de C_0 et P_0, que l'on notera $C_0^{(N)}$ et $P_0^{(N)}$, sur lesquelles on s'appuyera pour déterminer la prime du *call* et du *put* en continu.

3.1 Nouvelles notations

Expressions de $\tilde{S_T}$

Nous avons introduit à la fin du chapitre précédent, le terme $\tilde{S_T}$ tel que $\tilde{S_T} = S_T\alpha^{-T/\Delta t}$. Il faut donc déterminer dans un premier temps, l'expression du taux d'intérêt sachant que le pas de temps vaut $1/N$.

Taux d'intérêt de la caisse d'épargne En réalité, le taux d'intérêt r de la caisse d'épargne est constant durant la période T. Cependant, comme le vendeur modifie régulièrement la somme placée en caisse d'épargne (en effet, on a vu que $(X_t - Z_t)$ n'était pas constant), nous devons connaître le taux d'intérêt par pas de temps $\delta t = 1/N$. Il vaut alors $r \times \delta t = \frac{r}{N}$.

Remarque 3.1.1. Si nous supposons que la somme placée dans l'actif non risqué est constante, alors lorsque l'on place C_0 € en caisse d'épargne, au temps $t = 0$, il y aura alors au temps t (cf. propriété A.1.1) :

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{Nt}.$$

Voyons maintenant, lorsque l'on fait tendre N vers $+\infty$. Tout d'abord, nous avons :

$$C_t = C_0 \exp\left[Nt \cdot \ln\left(1 + \frac{r}{N}\right)\right].$$

Puisque $\lim_{N\to+\infty} \frac{r}{Nt} = 0$, nous allons utiliser le développement limité de la fonction $\ln(1+u)$ en 0, avec $u = \frac{r}{Nt}$, à l'ordre 1. Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} C_t &= C_0 \exp\left[Nt \cdot \left(\frac{rt}{Nt} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right] \\ &= C_0 \exp\left[rt + o(1)\right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{N}$: $C_t \sim C_0 \cdot e^{rt}$. Ainsi, puisqu'un pas de temps correspond au cas où $t = 1/N$, le taux d'intérêt par pas de temps peut également s'écrire $e^{r/N}$.

Calcul de $\tilde{S_T}$ Maintenant que nous avons la nouvelle notation du taux d'intérêt et que l'on sait que les t prennent des valeurs dans $0, 1/N, \ldots, T\}$, on a les conrresondances suivantes :

$$\alpha^{-T/\Delta t} = \left(e^{r/N}\right)^{-TN} = e^{-rT} \text{ et } S_T = S_0 \times \xi_{1/N} \times \cdots \times \xi_T.$$

Donc :

$$\tilde{S_T} = e^{-rT} S_0 \times \xi_{1/N} \times \cdots \xi_T.$$

Pour simplifier l'expression, nous allons introduire de nouvelles variables :

— La famille $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires i.i.d. telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\eta_k = \ln(\xi_{k/N}) - \frac{r}{N}.$$

Nous posons alors σ telle que :

$$-\frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \ln(d) - \frac{r}{N} \text{ et } \frac{\sigma}{\sqrt{N}} = \ln(u) - \frac{r}{N}.$$

Ceci implique que la famille $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ regroupent des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \,;\, +\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}$.

De plus, nous savons que la famille $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de paramètre p (et de paramètre q sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$). Il en est donc de même pour la famille $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

— La variable aléatoire $U_T^{(N)}$ telle que :

$$U_T^{(N)} = \sum_{i=1}^{Nt} \eta_i.$$

Ces deux nouvelles notions simplifient en effet l'expression de $\tilde{S_T}$, car :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\tilde{S_T}}{S_0}\right) &= -rT + \ln\left(\xi_{1/N} \times \cdots \times \xi_T\right) \\ &= -rT + \sum_{i=1}^{NT} \ln\left(\xi_{i/N}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{NT} \left(\ln(\xi_{i/N}) - r/N\right) \\ &= \sum_{i=1}^{NT} \eta_i = U_T^{(N)}. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons :

$$\tilde{S_T} = S_0 \exp\left(U_T^{(N)}\right).$$

Expression des fonctions g_c et g_p

Si nous reprenons la définition de g_c et g_p, avec les nouvelles notations, nous avons simplement :

$$g_c = e^{-rT} f_c \text{ et } g_p = e^{-rT} f_p.$$

Cependant, dans les expressions de C_0 et P_0 (cf. 2.9 et 2.10) du chapitre précédent, ces fonctions sont évaluées en $\tilde{S_T}$. Et selon précédemment, $\tilde{S_T} = S_0 \exp\left(U_T^{(N)}\right)$, avec S_0 connu. Pour que les fonction g_c et g_p soient évaluées en $U_T^{(N)}$ (qui nous est inconnu), nous comprenons alors qu'avecla nouvelle notation, ces fonctions deviennent :

$$\begin{aligned} g_c :&\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \\ X &\mapsto \left(S_0 e^X - K e^{-rT}\right)_+. \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} g_p :&\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \\ X &\mapsto \left(K e^{-rT} - S_0 e^X\right)_+. \end{aligned} \tag{3.2}$$

La loi suivie par ξ_k sous $\mathbb{P}^*$

Caractéristique de son espérance

Tout d'abord, nous rappelons que dans le précédent chapitre (cf. remarque 2.3.1), nous avons vu que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}^*[\xi_k] = \alpha.$$

Avec les nouvelles notations, nous pouvons dire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}^*[\xi_k] = e^{r/N}.$$

Cependant, nous savons que $\eta_k = \ln(\xi_{k/N}) - r/N$, autrement dit $\xi_{k/N} = e^{\eta_k} \times e^{r/N}$. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*\left[e^{\eta_k} \times e^{r/N}\right] &= e^{r/N} \\ \mathbb{E}^*\left[e^{\eta_k}\right] \times e^{r/N} &= e^{r/N} \\ \mathbb{E}^*\left[e^{\eta_k}\right] &= e^{r/N} \times e^{-r/N} \\ \mathbb{E}^*\left[e^{\eta_k}\right] &= 1. \end{aligned}$$

Désormais, on peut obtenir le paramètre recherché q qui définit la loi de η_k sous $\mathbb{P}^*$.

Expression de q

Grâce à la caractéristique de l'espérance des variables aléatoires η_k et également à la formule de transfert (cf. (A.2.3)), nous pouvons écrire que :

$$1 = \mathbb{P}^*\left[e^{\eta_k} = e^{-\sigma/\sqrt{N}}\right] \times e^{-\sigma/\sqrt{N}} + \mathbb{P}^*\left[e^{\eta_k} = e^{\sigma/\sqrt{N}}\right] \times e^{\sigma/\sqrt{N}},$$

ce qui revient à :

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}^*\left[\eta_k = -\sigma/\sqrt{N}\right] \times e^{-\sigma/\sqrt{N}} + \mathbb{P}^*\left[\eta_k = \sigma/\sqrt{N}\right] \times e^{\sigma/\sqrt{N}} \\ &= (1-q) \times e^{-\sigma/\sqrt{N}} + q \times e^{-\sigma/\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

On pose $D = -\sigma/\sqrt{N}$ et $= \sigma/\sqrt{N}$. Nous avons alors une équation à une inconnue q :

$$(1-q)e^D + qe^U = 1.$$

Nous trouvons alors :

$$\begin{aligned} q(e^U - e^D) + e^D &= 1 \\ q &= \frac{1 - e^D}{e^u - e^d}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous savons que l'on fait tendre N vers $+\infty$, ce qui nous permet de donner une approximation de la valeur de q par le développement limité de la fonction exponentielle en 0 puisqu'ici, $x = \pm\sigma/\sqrt{N}$ où $\lim\limits_{N\to+\infty} \left(\pm\sigma/\sqrt{N}\right) = 0$.

Nous rappelons tout d'abord, le développement limité de cette fonction à l'ordre 2 en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} o(x^2) = 0.$$

En remplaçant x par l'expression adéquate, nous avons :

$$\begin{aligned} e^{\sigma/\sqrt{N}} &= 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2}{2N} + o_1\left(\frac{\sigma^2}{N}\right), \\ e^{-\sigma/\sqrt{N}} &= 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2}{2N} + o_2\left(\frac{\sigma^2}{N}\right). \end{aligned}$$

Ainsi l'on obtient :

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\sigma/\sqrt{N}} &= \frac{\sigma}{\sqrt{N}} - \frac{\sigma^2}{2N} - o\left(\frac{\sigma^2}{N}\right), \\ e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}} &= 2\,\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \left[o\left(\frac{\sigma^2}{N}\right) - o\left(\frac{\sigma^2}{N}\right)\right] \\ &= 2\,\frac{\sigma}{\sqrt{N}} + o\left(\frac{\sigma^2}{N}\right). \end{aligned}$$

Nous avons alors q qui vaut :

$$\begin{aligned} q &= \frac{\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} - \dfrac{\sigma^2}{2N} - o\left(\dfrac{\sigma^2}{N}\right)}{\dfrac{2\sigma}{\sqrt{N}} + o\left(\dfrac{\sigma^2}{N}\right)} = \frac{\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\left[1 - \dfrac{\sigma}{2\sqrt{N}} - o\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)\right]}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\left[2 + o\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)\right]} \\ &= \frac{1 - \dfrac{\sigma}{2\sqrt{N}} - o\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)}{2 + o\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)} \\ &= \frac{1}{2 + o\left(\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)} \times \left(1 - \frac{\sigma}{2\sqrt{N}} - o\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)\right). \end{aligned}$$

Si l'on se préocupe seulement du premier terme du produit, on voit que :

$$\frac{1}{2\left(1 + o\left(\dfrac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right)\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + o\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right)\right)^{-1}.$$

Or on connait le développement limité de la fonction $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 1 en 0 :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} o(x) = 0.$$

Ici, $\alpha = -1$ et $x = o\left(\dfrac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right)$ puisque par définition, $\lim\limits_{N\to+\infty} o\left(\dfrac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right) = 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} \left(1 + o\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right)\right)^{-1} &= 1 - o\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right) + o\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right) \\ &= 1 - o\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

En reprenant l'approximation de q, on se retrouve avec :

$$\begin{aligned}
q &= \frac{1}{2}\left(1 + o\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right)\right) \times \left(1 - \frac{\sigma}{2\sqrt{N}} - o\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sigma}{2\sqrt{N}} - o\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) + o\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right) - o\left(\frac{\sigma^2}{4N}\right) - o\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right) \times o\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sigma}{2\sqrt{N}} + o\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{N}}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons une approximation du paramètre q :

$$q = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Conclusion

Expression de $C_0^{(N)}$ et $P_0^{(N)}$ Pour conclure, nous pouvons donner l'expression de la prime :

— **de l'option d'achat (*call* européen) :**

$$\begin{aligned}
C_0^{(N)} &= \mathbb{E}^*\left[\left(S_0 \exp\left(U_T^{(N)}\right) - Ke^{-rT}\right)_+\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[g_c\left(U_T^{(N)}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

— **de l'option de vente (*put* européen) :**

$$\begin{aligned}
P_0^{(N)} &= \mathbb{E}^*\left[\left(Ke^{-rT} - S_0 \exp\left(U_T^{(N)}\right)\right)_+\right] \\
&= \mathbb{E}^*\left[g_p\left(U_T^{(N)}\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Illustrations

Puisque nous connaissons q, nous pouvons choisir la probabilité p qui doit être proche de q, sinon on risque d'avoir une trop forte probabilité de hausse d'action (ou le contraire) alors que ce n'est pas le cas dans la réalité. Avec le paramètre p, il nous est possible de simuler l'évolution du prix de l'action $\tilde{S}_t$ au cours du temps. En effet, comme nous l'avons vu dans l'introduction, pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{Nt} \xi_{i/N},$$

avec $\{\xi_{i/N}\}_{i\in\mathbb{N}}$, la famille de variables aléatoires à valeurs dans $\{u, d\}$ de paramètre p.

Les paramètres choisis afin de montrer cette évolution sont : la probabilité $p = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sigma}{2\sqrt{N}}$, le prix de l'action initiale $S_0 = 100$€, l'échéance du contrat $T = 2$ ans, le taux d'intérêt sur cette période $r = 0.1$ et enfin, le paramètre σ appelé la *volatilité* telle que $\sigma = 1$.

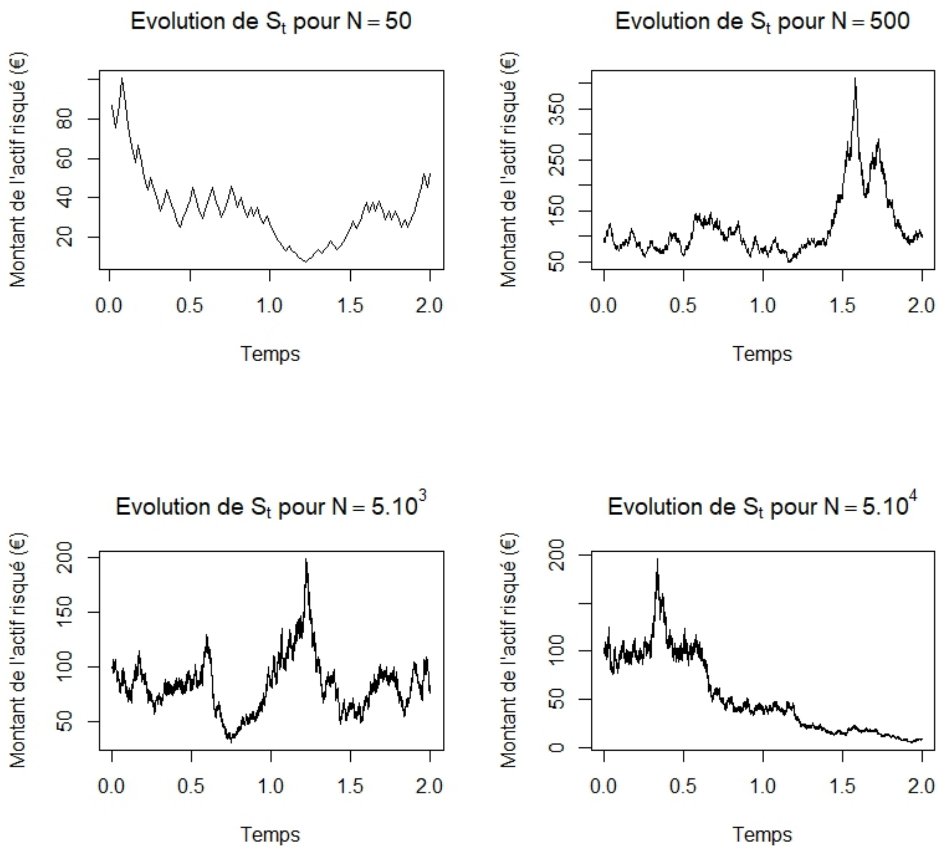

FIGURE 3.1 – Évolution du prix de l'action S_t en fonction de N

D'autre part, pour chacune des 2 options, nous pouvons illustrer deux situations : celle dans laquelle l'acheteur n'obtient pas de bénéfice, et celle dans laquelle il en obtient un. Prenons l'option d'achat, on a alors dans la première situation : $S_T < K + x$; et dans la seconde situation : $S_T > K + x$ (cf. "Option de vente" dans l'introduction du rapport).
Afin d'illustrer ces deux situations, nous avons choisis les paramètres suivants : le prix initial de l'action $S_0 = 100$€, le *strike* $K = 90e$, la durée du contrat $T = 2$ ans, le taux d'intérêt durant l'échéance $r = 0.1$, la volatilité $\sigma = 1$ et enfin, le paramètre $N = 200$ (ce qui donne $T \times N = 400$ pas de temps). Nous pouvons illustrer ces deux situations par l'évolution du prix de l'action S_t (on ajoutera sur ce graphe, la droite représentant la valeur $K + x$) et la progression du portefeuille du vendeur X_t. Nous pourrons donner également le montant du bénéfice ou de la perte de l'acheteur dans les deux cas.

Première situation
Les résultats retrouvés dans cette simulation sont : $S_T = 8.32$€, $X_T = 0$€avec $x = 59.23$€, et le montant de la perte de l'acheteur $P = 59.23$€.
Nous voyons dans le premier graphique que $S_T < K + x$ (puisque $K + x = 149.23$), ce qui explique que l'acheteur n'utilise pas l'option. Le vendeur n'a rien perdu puisque son portefeuille est nul ($X_T = 0$). Et l'acheteur a perdu la prime qu'il avait versée au temps $t = 0$.

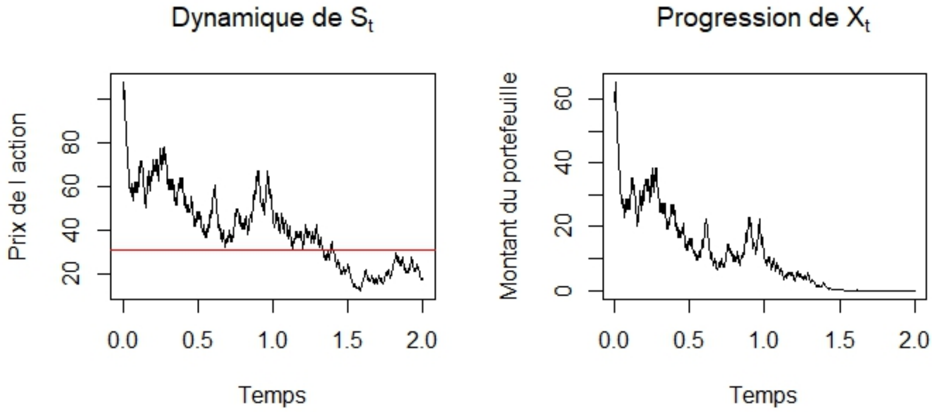

FIGURE 3.2 – Situation dans laquelle l'acheteur n'utilise pas l'option

Seconde situation
Les résultats sont : $S_T = 215.05$€, $X_T = 125.05$€avec $x = 59.23$€, et le montant du bénéfice de l'acheteur $B = 65.82$€.
Nous avons alors bien $S_T > K + x$ (car $K + x = 149.23$), ce qui pousse l'acheteur à utiliser l'option. D'autre part, on voit que le vendeur n'a rien perdu puisque le montant de son portefeuille X_T correspond à $S_T - K = 125.05$€. Enfin, on voit grâce au troisième graphe, que l'acheteur obtient bien un bénéfice de $S_T - K - x = 65.82$€.

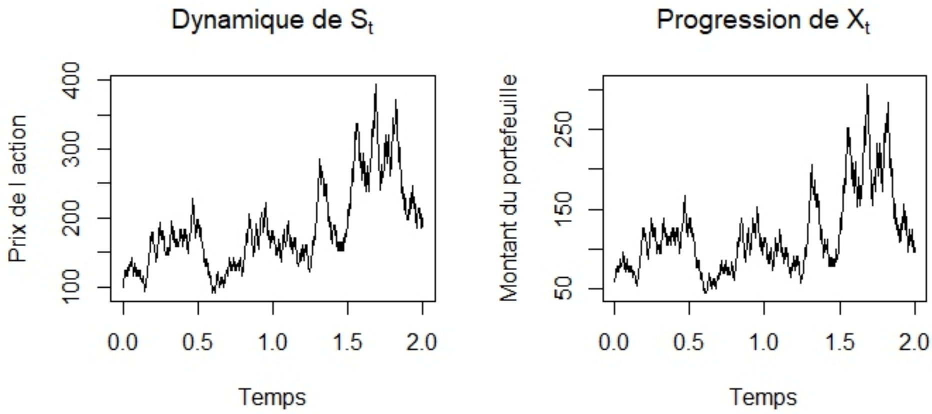

FIGURE 3.3 – Situation dans laquelle l'acheteur utilise l'option

Remarque 3.1.2. Afin de bien assimiler ces illustrations, nous pouvons retrouver les codes sources en annexes B.

3.2 Démarche de résolution

À partir des expressions (3.3) et (3.4), on comprend que $C_0^{(N)}$ et $P_0^{(N)}$ sont simplement l'espérance d'une fonction évaluée en $U_T^{(N)}$, la variable aléatoire précédemment introduite. Cependant, nous rappelons que nous voulons le prime en temps continu, nous devons donc faire tendre N vers $+\infty$. Ainsi, la résolution du problème se déroule en deux grandes parties que nous détaillerons ensuite :

1. Connaître la loi de probabilité vers laquelle converge $U_T^{(N)}$,

2. Calculer C_0 et P_0, les limites de $C_0^{(N)}$ et $P_0^{(N)}$.

Démarche pour connaître la convergence en loi de $U_T^{(N)}$

Afin de répondre à ce problème, nous allons utiliser la définition de la convergence en loi A.6.1, qui repose sur le calcul de la limite de la fonction caractéristique de $U_T^{(N)}$. Pour cela, nous allons calculer le développement limité de la fonction caractéristique de η_k, pour $k \in \mathbb{N}$ arbitraire, à partir de la formule de Taylor-Lagrange A.7.1. Nous aurons cependant besoin de prouver que η_k admette un moment d'ordre 3 (puisque nous allons appliquer la formule à cet ordre). Puis nous utiliserons la propriété A.4.4 pour déterminer le développement limité de la fonction caractéristique de $U_T^{(N)}$. Puis nous étudierons sa limite. Voici alors les étapes de résolution :

— Démontrer que η_k admette un moment d'ordre 3, pour $k \in \mathbb{N}$ arbitraire,
— Exprimer la développement limité de la fonction caractéristique de η_k,
— Déduire celui de $U_T^{(N)}$,
— Déterminer la limite de la fonction caractéristique de $U_T^{(N)}$.

Démarche pour exprimer C_0 et P_0

Dans cette partie, nous allons calculer C_0 et P_0 séparément. En effet, nous pourrons trouver tout d'abord P_0 grâce au théorème de la convergence en loi A.6.2, qui ne peut pas nous permettre de calculer C_0. Ce théorème demande effectivement que la fonction évaluée en $U_T^{(N)}$ soit continue et bornée. Or la fonction g_c ne l'est pas. Ainsi,après avoir prouvé que la fonction g_p est bien continue et bornée, on pourra trouver P_0. Ensuite pour le calcul de C_0, on trouvera une relation qui lie $P_0^{(N)}$ à $C_0^{(N)}$, ce qui nous permettra de trouver son expression. Nous pourrons vérifier si les expressions trouvées sont justes, grâce à l'article original de Black-Scholes [1], mais également l'article [4]. Les étapes de résolution sont alors :

— Démontrer que g_p est continue et bornée,
— Exprimer P_0,
— Calculer la parité *call/put* liant $P_0^{(N)}$ à $C_0^{(N)}$,
— Exprimer C_0.

3.3 Première partie de la résolution du problème

η_k admet un moment d'ordre 3

Autrement dit, il faut montrer que $\mathbb{E}^*\left[\left|{\eta_k}^3\right|\right] < +\infty, k \in \mathbb{N}$. Nous rappelons tout d'abord que η_k est une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, +\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}$.
Ainsi, on peut écrire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left(|\eta_k| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right) \Longrightarrow \left(\left|{\eta_k}^3\right| \leq \frac{\sigma^3}{N^{3/2}}\right).$$

On applique l'espérance, en se rappelant que l'espérance d'une constante est égale à cette constante (cf. propriété A.2.5) :

$$\left(\mathbb{E}^*\left[\left|{\eta_k}^3\right|\right] \leq \frac{\sigma^3}{N^{3/2}}\right) \Longrightarrow \left(\mathbb{E}^*\left[\left|{\eta_k}^3\right|\right] < +\infty\right).$$

La variable η_k admet donc bien un moment d'ordre 3.

Remarque 3.3.1. Il est alors possible d'appliquer le théorème A.4.6 à cette variable aléaoire.

Développement limité de la fonction caractéristique de η_k

Afin de déterminer ce développement limité, nous allons appliquer la formule de Taylor-Lagrange A.7.1. Cependant, ce théorème ne s'applique pas aux fonctions complexes, ce qui explique que l'on utilise pas le théorème A.4.6. Nous allons donc contourner le problème à partir de la définition de la fonction caractéristique (cf. définition A.4.1) :

$$\phi_{\eta_k}(t) = \mathbb{E}\big[\cos(t\eta_k)\big] + \mathrm{i}\cdot\mathbb{E}\big[\sin(t\eta_k)\big].$$

En effet, nous allons appliquer la formule de Taylor-Lagrange pour les fonctions cosinus et sinus. Néanmoins, pour ce faire,nous devons savoir si pour tout $n \in \{0,1,2,3\}$, $\mathbb{E}\Big[\big|\cos^{(n)}(t\eta_k)\big|\Big]$ et $\mathbb{E}\Big[\big|\sin^{(n)}(t\eta_k)\big|\Big]$ sont finis.

Caractère borné de $\mathbb{E}\Big[\big|\cos^{(n)}(t\eta_k)\big|\Big]$ et $\mathbb{E}\Big[\big|\sin^{(n)}(t\eta_k)\big|\Big]$

Premièrement, nous pouvons écrire que pour $n \in \{0,1,2,3\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos^{(n)}(t\eta_k) = \begin{cases} \pm{\eta_k}^n\cos(t\eta_k) \\ \pm{\eta_k}^n\sin(t\eta_k) \end{cases}, \qquad \sin^{(n)}(t\eta_k) = \begin{cases} \pm{\eta_k}^n\cos(t\eta_k) \\ \pm{\eta_k}^n\sin(t\eta_k) \end{cases}.$$

Ensuite, puisque l'on connaît les valeurs prises par η_k et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions cosinus et sinus sont bornées supérieurement par 1, alors :

$$\begin{aligned} \big|\cos^{(n)}(t\eta_k)\big| &\leq \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^n & \qquad \big|\sin^{(n)}(t\eta_k)\big| &\leq \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^n \\ \mathbb{E}\Big[\big|\cos^{(n)}(t\eta_k)\big|\Big] &\leq \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^n & \qquad \mathbb{E}\Big[\big|\sin^{(n)}(t\eta_k)\big|\Big] &\leq \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)^n \\ \mathbb{E}\Big[\big|\cos^{(n)}(t\eta_k)\big|\Big] &< +\infty. & \qquad \mathbb{E}\Big[\big|\sin^{(n)}(t\eta_k)\big|\Big] &< +\infty. \end{aligned}$$

Il est alors bien possible d'utiliser la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 pour ces fonctions.

Remarque 3.3.2. Nous allons l'utiliser au point $x_0 = 0$ puisque $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = 0$.

Application du développement limité A.7.1

Comme nous l'avons dit, nous appliquons ce développement limité au point $x_0 = 0$ à l'ordre 3. Ainsi l'on sait que pour $\theta_1, \theta_2 \in \,]0,1[$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\cdot\sin(\theta_1 x) \quad \text{et} \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!}(1-\cos(\theta_2 x)).$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) &= 1 + \mathrm{i}x - \frac{x^2}{2} - \mathrm{i}\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\Big(\sin(\theta_1 x) + \mathrm{i} - \mathrm{i}\cos(\theta_2 x)\Big) \\ &= 1 + \mathrm{i}x - \frac{x^2}{2} - \mathrm{i}\frac{x^3}{6} - \mathrm{i}\frac{x^3}{6}\Big(\cos(\theta_2 x) - 1 + \mathrm{i}\sin(\theta_1 x)\Big). \end{aligned}$$

Il reste à remplacer x par $t\eta_k$. Or on sait que l'on peut appliquer l'espérance (puisque nous l'avons prouver au point précédent) et que l'espérance est une application linéaire (cf. deuxième propriété A.2.5), ainsi :

$$\phi_{\eta_k}(t) = 1 + \mathrm{i}\mathbb{E}^*\big[\eta_k\big] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}^*\big[{\eta_k}^2\big] - \mathrm{i}\frac{t^3}{6}\Big(\mathbb{E}^*\big[{\eta_k}^3\big] + \delta\big(t\eta_k\big)\Big),$$

avec $\delta\big(t\theta_k\big) = \mathbb{E}^*\Big[{\eta_k}^3\big(\cos(\theta_2 t\eta_k) - 1 + \mathrm{i}\sin(\theta_1 t\eta_k)\big)\Big]$.

Afin d'obtenir le développement limité de la fonction caractéristique, il nous faut les expressions de $\mathbb{E}^*\big[\eta_k\big]$, $\mathbb{E}^*\big[{\eta_k}^2\big]$ et $\mathbb{E}^*\big[{\eta_k}^3\big]$, mais tout d'abord nous devons étudier la fonction δ afin de connaître l'ordre auquel nous pourrons tronquer la fonction $\phi_{\eta_k}(t)$.

Étude de la fonction δ

Afin de déterminer cet ordre, nous allons borner la fonction δ. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\left|\delta\big(t\eta_k\big)\right| &= \left|\mathbb{E}^*\left[{\eta_k}^3\big(\cos(\theta_2 t\eta_k) - 1 + \mathrm{i}\sin(\theta_1 t\eta_k)\big)\right]\right| \\ &= \mathbb{E}^*\left[\left|{\eta_k}^3\right|\right] \cdot \mathbb{E}^*\left[\big|\cos(\theta_2 t\eta_k) - 1 + \mathrm{i}\sin(\theta_1 t\eta_k)\big|\right].\end{aligned}$$

Commençons par borner le terme suivant : $\cos(\theta_2 t\eta_k) - 1 + \mathrm{i}\sin(\theta_1 t\eta_k)$. Nous savons que les fonctions cosinus et sinus sont bornées par -1 et 1. De plus, comme nous pouvons le voir dans l'article de L. Breiman [2], l'inégalité triangulaire nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\big|\cos(\theta_2 t\eta_k) - 1 + \mathrm{i}\sin(\theta_1 t\eta_k)\big| &\leq \big|\cos(\theta_2 t\eta_k) - 1\big| + \big|\mathrm{i}\sin(\theta_1 t\eta_k)\big| \\ &\leq 3.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\left|\delta\big(t\eta_k\big)\right| \leq 3 \cdot \mathbb{E}^*\left[\left|{\eta_k}^3\right|\right].$$

Il faut désormais calculer $\mathbb{E}^*\left[\left|{\eta_k}^3\right|\right]$. Selon les valeurs prises par la variable aléatoire η_k, on a :

$$\left(\left|{\eta_k}^3\right| \leq \frac{\sigma^3}{N^{3/2}}\right) \Longrightarrow \left(\mathbb{E}^*\left[\left|{\eta_k}^3\right|\right] \leq \frac{\sigma^3}{N^{3/2}}\right).$$

On a alors :

$$\left|\delta\big(t\eta_k\big)\right| \leq \frac{3\sigma^3}{N^{3/2}}.$$

Déterminer le moment de η_k

Nous appliquons la formule de transfert (cf. théorème A.2.3) :

$$\mathbb{E}^*\big[\eta_k\big] = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times \mathbb{P}^*\left[\eta_k = -\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right] + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times \mathbb{P}^*\left[\eta_k = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right].$$

Cependant nous avons précédemment déterminé la loi suivie par η_k définie à partir du parmètre q tel que :

$$q = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Nous pouvons donc écrire que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\big[\eta_k\big] &= -\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times (1-q) + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times q \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4\sqrt{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right) \\ &= -\frac{\sigma^2}{4N} - \frac{\sigma^2}{4N} + o\left(\frac{\sigma}{N}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$\mathbb{E}^*\big[\eta_k\big] = -\frac{\sigma^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Déterminer le moment d'ordre 2 de η_k

Nous savons que η_k està valeurs dans $\left\{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, +\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}$. D'où :

$${\eta_k}^2 = \frac{\sigma^2}{N}.$$

En se rappelant de la première propriété A.2.5 de l'espérance, nous avons le moment d'ordre 2 de η_k :

$$\mathbb{E}^*\big[{\eta_k}^2\big] = \frac{\sigma^2}{N}.$$

Approximation de ϕ_{η_k}
Selon les calculs précédents, nous pouvons donner l'expression du développement limité de la fonction caractéristique de η_k pour k quelconque :

$$\phi_{\eta_k}(t) = 1 - \mathrm{i}\frac{t\sigma^2}{2N} - \frac{t^2\sigma^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

Déduire le développement limité de la fonction caractéristique de $U_T^{(N)}$

Ici, nous allons appliquer le théorème A.4.4 afin de donner une approximation de la fonction caractéristique de $U_T^{(N)}$, que l'on notera $\phi_U^{(N)}$. On peut en effet appliquer ce théorème car :

$$U_T^{(N)} = \sum_{k=1}^{NT} \eta_k, \quad \text{avec} \quad \{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{une famille de variables aléatoires i.i.d..}$$

En connaissant les propriétés de l'espérance A.2.5, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
\phi_U^{(N)}(t) &= \prod_{k=1}^{NT} \phi_{\eta_k}(t) \\
&= (\phi_{\eta_k}(t))^{NT} \\
&= \left(1 - \frac{\mathrm{i}t\sigma^2}{2N} - \frac{t^2\sigma^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)\right)^{NT} \\
&= \left[1 + \left(-\frac{\mathrm{i}t\sigma^2 + t^2\sigma^2}{2N}\right)\right]^{NT} \\
&= \left[1 + \left(-\frac{\mathrm{i}t\sigma^2 + t^2\sigma^2}{2N} + o\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right)\right)\right]^{NT}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction caractéristique de $U_T^{(N)}$ vaut approximativement :

$$\phi_U^{(N)}(t) = \left[1 + \frac{1}{NT}\left(-\frac{\mathrm{i}t\sigma^2 T}{2} - \frac{t^2\sigma^2 T}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right)\right]^{NT}.$$

Loi vers laquelle converge la loi de $U_T^{(N)}$

Dans cette partie, nous allons utiliser la définition A.6.1 de la convergence en loi. Ceci signifie qu'il faut trouver la foction ϕ_U telle que $\lim\limits_{N\to+\infty} \phi_U^{(N)} = \phi_U$. Puis nous déterminerons la loi que caractérise ϕ_U (puisque l'on sait qu'un fonction caractéristique d'une variable aléatoire caractérise sa loi, selon le théorème A.4.5).Étudions alors la limite de $\phi_U^{(N)}$.
Si l'on pose $H = -\frac{\mathrm{i}t\sigma^2 T}{2} - \frac{t^2\sigma^2 T}{2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, nous avons alors :

$$\phi_U^{(N)}(t) = \left[1 + \frac{H}{NT}\right]^{NT}.$$

Voyons ici lorsque N tend vers $+\infty$. Tout d'abord, nous avons :

$$\phi_U^{(N)}(t) = \exp\left[NT \cdot \ln\left(1 + \frac{H}{NT}\right)\right].$$

Nous savons que $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{H}{NT} = 0$, ce qui explique que l'on puisse utiliser le développement limité de $\ln(1+u)$ en 0, avec $u = \dfrac{H}{NT}$, à l'ordre 1. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\phi_U^{(N)}(t) &= \exp\left[NT\cdot\left(\frac{H}{NT} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right]\\ &= \exp\left[H + o(1)\right].\end{aligned}$$

Si l'on remplace H par son expression, nous avons :

$$H + o(1) = -\frac{\mathrm{i}t\sigma^2 T}{2} - \frac{t^2\sigma^2 T}{2} + o(1).$$

Finalement :

$$\phi_U^{(N)}(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}t\sigma^2 T}{2} - \frac{t^2\sigma^2 T}{2} + o(1)\right).$$

Désormais, afin de trouver quelle loi est caractérisée par cette fonction, on pose $\mu = -\frac{\sigma^2 T}{2}$ et $\sigma' = \sigma\sqrt{T}$. Nous avons donc :

$$\phi_U(t) = \lim_{N\to+\infty} \phi_U^{(N)}(t) = \exp\left(\mathrm{i}t\mu - \frac{t^2\sigma'^2}{2}\right).$$

Ici l'on reconnaît la fonction caractéristique d'une variable aléatoire normale de paramètre μ et σ' (cf. fonction caractéristique de la loi normale A.5.3). Ainsi l'on sait désormais que :

$$U_T^{(N)} \xrightarrow{\mathcal{L}} U_T, \quad \text{avec } U_T \sim \mathcal{N}\left(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma\sqrt{T}\right).$$

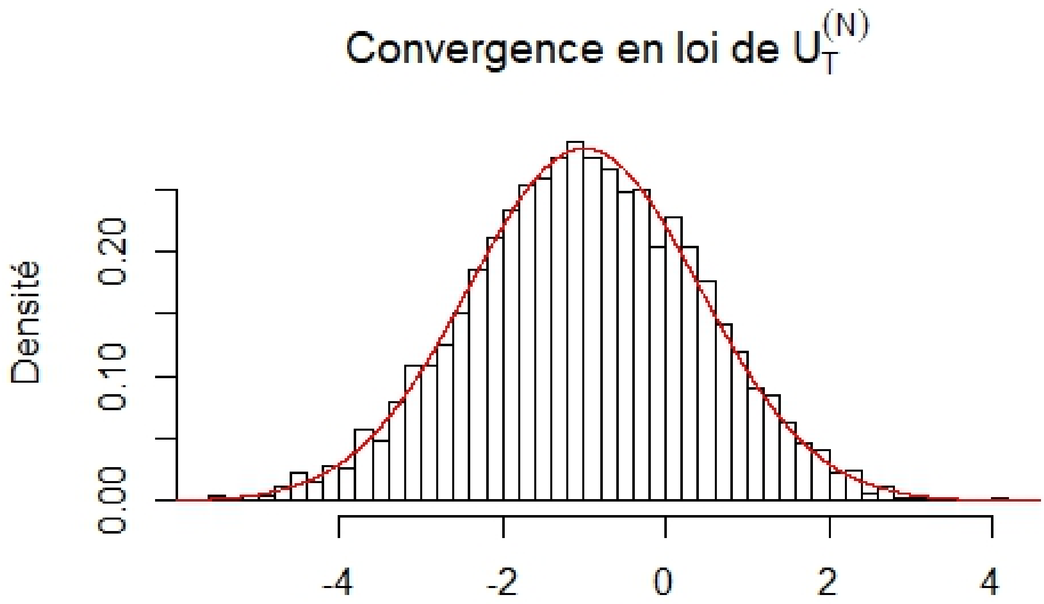

Figure 3.4 – Convergence de U_T vers une loi normale

Remarques 3.3.3.

- Les paramètres utilisés sont les suivants : le prix de l'action au temps $t = 0$ $S_0 = 100€$, le taux d'intérêt $r = 0.1$, la volatilité $\sigma = 1$, l'échéance $T = 2$ ans, le paramètre $N = 900$ ce qui donne $T \times N = 1800$ pas de temps et le nombre de variables aléatoire $U_T^{(N)}$ $M = 3000$.
- Le code source de cette illustration se trouve en annexe.

3.4 Seconde partie de la résolution du problème

Continuité et caractère borné de g_p

Afin de mieux cerner la fonction g_p (cf. 3.2), nous allons l'écrire plus explicitement :

$$\begin{aligned} g_p :& \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \\ & X \mapsto \begin{cases} Ke^{-rT} - Se^X & \text{si } s^X \leq \dfrac{K}{S_0}e^{-rT}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On voit clairement que cette fonction est continue puisque la fonction nulle et la fonction exponentielle le sont, mais aussi parce que l'on peut montrer qu'elle est continue au point $P = \ln(K/S_0) - r/T$:

$$\lim_{X \to P^-} g_p(X) = Ke^{-rT} - S_0 \times \frac{K}{S_0}e^{-rT} = 0 = \lim_{X \to P^+} g_p(X).$$

Désormais, il reste à montrer qu'elle est bornée. Grâce à la nouvelle façon d'exprimer g_p, on remarque rapidement que :

$$0 \leq g_p \leq Ke^{-rT}.$$

En effet, lorsque $X \geq P$, on a la fonction nulle. Puis, lorsque $X \leq P$, on soustrait S_0e^X à Ke^{-rT}. On a donc bien g_p continue et bornée, ce qui nous permet de trouver P_0 (cf. théorème A.6.2).

Expression de P_0

Comme nous savons que $U_T^{(N)}$ converge en loi vers U_T et que g_p est continue et bornée,nous avons selon le théorème A.6.2 :

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}^*\Big[g^p\big(U_T^{(N)}\big)\Big] = \mathbb{E}^*\Big[g_p\big(U_T\big)\Big].$$

Il nous reste ainsi à calculer $\mathbb{E}^*\Big[g_p\big(U_T\big)\Big]$ afin d'obtenir la prime de l'option de vente. Selon la définition de l'espérance A.2.6, nous pouvons écrire que :

$$\mathbb{E}^*\Big[g_p\big(U_T\big)\Big] = \int_{\mathbb{R}} g_p(x)\varphi_U(x)dx, \quad \text{avec } \varphi_U \text{ la fonction caractéristique de } U_T.$$

Cependant, nous savons que $U_T \sim\sim \mathcal{N}\left(-\frac{\sigma^2 T}{2}, \sigma\sqrt{T}\right)$, dont on connaît sa fonction densité (cf. fonction densité de la loi normale A.5.1), ce qui donne :

$$\mathbb{E}^*\Big[g_p\big(U_T\big)\Big] = \int_{\mathbb{R}} g_p(x) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right) dx.$$

Ici, nous procèdons au changement de variable suivant, comme dans l'article de M. Diener [5] :

$$y = \frac{x + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}},$$

ce qui donne :

$$x = \sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2}, \qquad dx = \sigma\sqrt{T}dy, \qquad \big(x \to \pm\infty\big) \Rightarrow \big(y \to \pm\infty\big).$$

Nous avons alors :

$$\mathbb{E}^*\Big[g_p\big(U_T\big)\Big] = \int_{\mathbb{R}} g_p\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

On reconnaît la fonction densité $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}$ de la loi normale centrée réduite, ce qui facilite l'expression de $\mathbb{E}^*\Big[g_p\big(U_T\big)\Big]$:

$$\mathbb{E}^*\Big[g_p\big(U_T\big)\Big] = \int_{\mathbb{R}} g_p\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2}\right) \times \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(y)dy.$$

Regardons désormais la fonction g_p. Nous savons qu'il sagit d'une fonction positive sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que l'on doit s'intéresser seulement à la fonction lorsqu'elle n'est pas nulle (sinon l'intégrale le sera). Selon l'expression de g_p (cf. 3.2) :

$$g_p \neq 0 \Rightarrow x < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - rT. \tag{3.5}$$

On rappelle ici que $x = \sigma\sqrt{T}y - \dfrac{\sigma^2 T}{2}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
x < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - rT &\iff \sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2} < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - rT \\
&\iff \sigma\sqrt{T}y < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - rT + \frac{\sigma^2 T}{2} \\
&\iff y < \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}.
\end{aligned}$$

Pour faciliter l'écriture, on nomme d_1, le point tel que $\left(x < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - rT\right) \iff \big(y < d_1\big)$. Ainsi, pour respecter la condition 3.5, on modifie une des bornes de l'intégrale. En ayant remplacé la fonction g_p par son expression 3.2, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*\Big[g_p\big(U_T\big)\Big] &= \int_{-\infty}^{d_1} \left(Ke^{-rT} - S_0 \exp\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2}\right)\right) \times \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(y)dy \\
&= \left[Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_1} \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(y)dy\right] - \left[S_0 \int_{-\infty}^{d_1} \exp\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2}\right) \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(y)dy\right].
\end{aligned}$$

Dans le premier terme de la soustraction, nous pouvons remarquer qu'il y a la fonction de répartition $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}$ de la loi normale centrée réduite (cf. définition A.3.4) évaluée au point d_1. Or $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}$ est très bien connue par de nombreux logiciels informatiques, ce qui explique que si le second terme de la précédente expression peut être exprimée à partir de $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}$, alors la prime de l'option de vente sera facilement calculée.
En nommant ce terme T et en explicitant la fonction densité $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
T &= S_0 \int_{-\infty}^{d_1} \exp\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2}\right) \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(y)dy \\
&= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} \exp\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2}\right) \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) dy.
\end{aligned}$$

Nous procédons à un second changement de variable :

$$z = y - \sigma\sqrt{T}.$$

Ainsi l'on se retrouve avec :

$$dy = dz, \qquad \big(y = d_1\big) \to \left(z = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \frac{r\sqrt{T}}{\sigma} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right), \qquad \big(y \to -\infty\big) \to \big(z \to -\infty\big).$$

On nomme d_2 le point tel que $\big(y = d_1\big) \to \big(z = d_2\big)$. Nous avons alors :

$$T = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \exp\left(\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}z\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\Big(z + \sigma\sqrt{T}\Big)^2\right) dz.$$

À partir d'ici, nous allons ramener les deux fonctions exponentielles en une seule fonction. Par conséquent, la fonction exponentielle sera évaluée en :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}z - \frac{1}{2}\Big(z + \sigma\sqrt{T}\Big)^2 &= \frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}z - \frac{1}{2}\Big(z^2 + 2\sigma\sqrt{T} + \sigma^2 T\Big) \\
&= \frac{\sigma^2 T}{2} + \sigma\sqrt{T}z - \frac{z^2}{2} - \sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2 T}{2} \\
&= -\frac{z^2}{2}.
\end{aligned}$$

Nous avons le terme T qui devient :

$$T = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,$$

dans lequel on retrouve la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}$, évaluée en d_2 (cf. définition A.3.4).
En réunissant les deux termes de $\mathbb{E}^*\Big[g_p\big(U_T\big)\Big] = P_0$, exprimés avec la fonction $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}$, nous avons :

$$P_0 = Ke^{-rT}\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - S_0\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2). \tag{3.6}$$

Remarque 3.4.1. Il s'agit bien de la prime de l'option de vente retrouvée dans l'article original [1].

La parité *call/put*

Cette relation peut être obtenue à partir de l'expression de X_t (le montant du portefeuille du vendeur au temps t), que l'on a démontrée dans le chapitre précédent (cf. 2.8). Avec les notations du chapitre précédent, nous rappelons que :

$$X_t = \frac{1}{\alpha^{T-t}}\big(\phi^{T-t}f\big)\big(S_t\big).$$

Ici l'on peut remplacer $\big(\phi^{T-t}f\big)$ par son expression 2.3 :

$$X_t = \frac{1}{\alpha^{T-t}} \sum_{\ell=0}^{T-t} \binom{T-t}{\ell} \frac{(u-\alpha)^{T-t-\ell}(\alpha-d)^{\ell}}{(u-d)^{T-t}} f\Big(S_t d^{T-t-\ell}u^{\ell}\Big).$$

Cependant, nous savons que $q = \dfrac{\alpha - d}{u - d}$, nous avons donc :

$$X_t = \alpha^{T-t} \sum_{\ell=0}^{T-t} q^{\ell}(1-q)^{T-t-\ell} f\Big(S_t d^{T-t-\ell}u^{\ell}\Big).$$

En reprenant cette formule pour le cas $t = 0$ et les fonctions f_c et f_p (cf. (1.1) et (1.2)), nous pouvons exprimer C_0 et P_0 :

$$\begin{cases}
C_0 &= \alpha^{-T} \sum_{\ell=0}^{T} q^{\ell}(1-q)^{T-\ell}\Big(S_0 d^{T-\ell}u^{\ell} - K\Big)_+, \\
P_0 &= \alpha^{-T} \sum_{\ell=0}^{T} q^{\ell}(1-q)^{T-\ell}\Big(K - S_0 d^{T-\ell}u^{\ell}\Big)_+.
\end{cases}$$

Ici nous apliquons les nouvelles notations de ce chapitre, ce qui donne :

$$\begin{cases} C_0^{(N)} &= e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} \Big(S_0 d^{T-\ell} u^\ell - K \Big)_+, \\ P_0^{(N)} &= e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} \Big(K - S_0 d^{T-\ell} u^\ell \Big)_+. \end{cases}$$

Si l'on soustrait ces deux équations, nous avons alors :

$$\begin{aligned} C_0^{(N)} - P_0^{(N)} &= e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} \left[\Big(S_0 d^{T-\ell} u^\ell - K \Big)_+ - \Big(K - S_0 d^{T-\ell} u^\ell \Big)_+ \right] \\ &= e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} \Big(S_0 d^{T-\ell} u^\ell - K \Big) \\ &= \left[e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} S_0 d^{T-\ell} u^\ell \right] - \left[K e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} \right]. \end{aligned}$$

Or, selon le binôme de Newton, nous avons :

$$\sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} = \big(q + 1 - q \big)^\ell = 1.$$

Donc, nous nous retrouvons avec :

$$C_0^{(N)} - P_0^{(N)} = \left[e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} S_0 d^{T-\ell} u^\ell \right] - \Big[K e^{-rT} \Big].$$

Cependant, nous pouvons remarquer que l'expression suivante :

$$e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} S_0 d^{T-\ell} u^\ell,$$

correspond à l'expression de $C_0^{(N)}$ pour $K = 0$ En effet :

$$C_0^{(N)} = e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} \Big(S_0 d^{T-\ell} u^\ell - K \Big)_+.$$

Donc si l'on a $K = 0$, on retrouve bien notre premier terme dans l'expression de $C_0^{(N)} - P_0^{(N)}$. Étudions alors la situation où $K = 0$. Nous rappelons tout d'abord que la prime C_0 est calculée afin qu'au temps T, elle vaille ma différence entre S_T et K (lorsque celle-ci est positive). Par conséquent, si $K = 0$, il s'agit de la différence entre S_T et 0 (autrement dit, il s'agit de la valeur S_T). Or la seule valeur au temps $t = 0$ qui devient S_T au temps $t = T$, est S_0. Nous pouvons donc écrire que :

$$e^{-rT} \sum_{\ell=0}^{T} q^\ell (1-q)^{T-\ell} S_0 d^{T-\ell} u^\ell = S_0.$$

On reprend alors notre expression de $C_0^{(N)} - P_0^{(N)}$ avec ce que nous venons de remarquer. Nous avons donc la parité *call/put* recherchée, qui est explicetement notée dans l'article de F. Malrieu [6] :

$$C_0^{(N)} - P_0^{(N)} = S_0 - K e^{-rT}.$$

Expression de C_0

À partir de la parité *call/put*, nous allons faire tendre N vers $+\infty$, ce qui nous permettra de déduire l'expression de C_0 (puisque nous connaissons celle de P_0). La limite de la parité *call/put* vaut simplement :

$$C_0 - P_0 = S_0 - K e^{-rT}.$$

Ici, nous isolons C_0 et remplaçons P_0 par son expression (cf. 3.6), puis nous factorisons par S_0 et Ke^{-rT} :

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 - Ke^{-rT} + P_0 \\ &= S_0 - Ke^{-rT} + Ke^{-rT}\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - S_0\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2) \\ &= S_0\Big[1 - \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2)\Big] - Ke^{-rT}\Big[1 - \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1)\Big]. \end{aligned}$$

Or selon la propriété de la loi normale A.5.2, nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$1 - \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(-x).$$

Nous avons donc l'expression de C_0 en fonction de $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}$:

$$C_0 = S_0\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_2) - Ke^{-rT}\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_1). \tag{3.7}$$

Remarque 3.4.2. L'article original [1] démontre également que la prime de l'option de vente vaut ceci.

3.5 Réponse au problème

Nous savons désormais quel est le montant adéquat de la prime que le vendeur peut demander à l'acheteur, afin qu'elle soit égale à l'éventuel bénéfice de l'acheteur à l'échéance T. Avec la fonction $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}$, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

— **La prime de l'option d'achat (*call* européen) vaut :**

$$C_0 = S_0\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_2) - Ke^{-rT}\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(-d_1).$$

— **La prime de l'option de vente (*put* européen) vaut :**

$$P_0 = Ke^{-rT}\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(d_1) - S_0\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(d_2).$$

Remarque 3.5.1. Afin d'appliquer la formule de Black-Scholes, voici une rapide simulation sur R-Studio :

```
#Les données
S0=100
K=90
T=2
r=0.1
sigma=1

#Les points
d1<-(sigma*T^(1/2))^(-1)*log(K/S0)-(r*(T^(1/2)))/sigma+sigma*(T^(1/2))/2
d2<-(sigma*T^(1/2))^(-1)*log(K/S0)-(r*(T^(1/2)))/sigma-sigma*(T^(1/2))/2

F_m1<-pnorm(-d1) #calcul de Φ_N(0,1)(−d1)
F_m2<-pnorm(-d2) #calcul de Φ_N(0,1)(−d2)

F_p1<-pnorm(d1) #calcul de Φ_N(0,1)(d1)
F_p2<-pnorm(d2) #calcul de Φ_N(0,1)(d2)


C0<-S0*F_m2-K*exp(-r*T)*F_m1 #Calcul de C_0
P0<-K*exp(-r*T)*F_p1-S0*F_p2 #Calcul de P_0

#Afficher les résultats
C0
P0
```

Après compilation, nous avons $C_0 = 59,23$€ et $P_0 = 32,92$€.

Annexe A

Points cours (cf. références [7] et [8])

A.1 Introduction

Théorème A.1.1. (Calcul de l'épargne). Soit C_0€, l'épargne placée dans l'actif non risqué au temps $t = 0$, dont le taux d'intérêt est $r < 1$ sur une période d'une unité de temps Δt. Alors, au temps $t = T$, l'épargne s'élève à :

$$C_T = C_0(1 + r)^{T/\Delta t}$$

Démonstration. Admettons que le compte possède C_t € au temps t, à 1 unité de temps plus tard, il possèdera alors :

$$\begin{aligned} C_{t+\Delta t} &= C_t + C_t \times r, \\ &= C_t(1 + r). \end{aligned}$$

On procède au changement de variable $T = t + \Delta t$ qui nous sera plus utile. Par conséquent :

$$C_T = C_{T-\Delta t}(1 + r).$$

Ainsi, par récurrence, nous avons :

$$\begin{aligned} C_T &= C_{T-2\times\Delta t}(1 + r)^2 \\ &= \dots \\ &= C_{T-k\Delta t}(1 + r)^k, \quad \text{avec} \quad T - k\Delta t = 0. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons bien :

$$C_T = C_0(1 + r)^{T/\Delta t}.$$

□

A.2 L'espérance

En temps discret

Définition A.2.1. Soit $X : \Omega \to \mathbb{E}$, une variable aléatoire discrète, intégrable, à valeurs dans $E \subseteq \mathbb{R}$ dénombrable, et $f : E \to \mathbb{R}$, une fonction continue et positive. On définit l'espérance de $f(X)$ par :

$$\mathbb{E}\big[f(X)\big] = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega f\big(X(\omega)\big).$$

Remarques A.2.2.

— Il s'agit de la somme des valeurs possibles pondérées par leur probabiltié.
— Si $\dim E < +\infty$, alors X est intégrable.

— Si $f(X) = Y$, alors nous parlons de moyenne de Y telle que $mathbbE[Y] = \sum_{\omega\in\Omega} p\omega Y(\omega)$.

Théorème A.2.3. (Formule de transfert). Soit $X : \Omega \to \mathbb{E}$, une variable aléatoire discrète, intégrable, à valeurs dans $E \subseteq \mathbb{R}$ dénombrable, et $f : E \to \mathbb{R}$, une fonction continue et positive. L'espérance de $f(X)$ vaut alors :

$$\mathbb{E}\big[f(X)\big] = \sum_{k\in E} f(k)\mathbb{P}\big[X = k\big].$$

Remarque A.2.4. Si $f(X) = Y$, alors la moyenne de Y vaut $\mathbb{E}[Y] = \sum_{k\in E} k \cdot \mathbb{P}[Y = k]$.

Démonstration. Nous savons que $\Omega = \bigsqcup_{k\in E} \big\{\omega : X(\omega) = k\big\}$. Donc, selon la définition de l'espérance de $f(X)$ et avec $E_k = \big\{\omega : X(\omega) = k\big\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[f(X)\big] &= \sum_{k\in E}\sum_{\omega\in E_k} p_\omega \cdot f(k)\\ &= \sum_{k\in E} f(k) \cdot \sum_{\omega\in E_k} p_\omega\\ &= \sum_{k\in E} f(k) \cdot \mathbb{P}\big[X = k\big].\end{aligned}$$

□

Propriétés A.2.5. Soient $X : \Omega \to E_1$ et $Y : \Omega \to E_2$, deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E_1 \subseteq \mathbb{R}$ et $E_2 \subseteq \mathbb{R}$ dénombrables, et les fonctions continues $f : E_1 \to \mathbb{R}$ et $g : E_2 \to \mathbb{R}$. Nous avons alors :

1. Si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \alpha \in E_1$, alors $\mathbb{E}[X] = \alpha$,
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a alors $\mathbb{E}\big[\alpha \cdot f(X) + \beta \cdot g(Y)\big] = \alpha \cdot \mathbb{E}\big[f(X)\big] + \beta \cdot \mathbb{E}\big[g(Y)\big]$,
3. Si X et Y sont indépendants, alors $\mathbb{E}\big[f(X) \cdot g(Y)\big] = \mathbb{E}\big[f(X)\big] \cdot \mathbb{E}\big[g(Y)\big]$.

Démonstration.

1. Puisque $X(\omega) = \alpha$, pour tout $\omega \in \Omega$, alors $\mathbb{P}[X = \alpha] = 1$. Donc par la formule de transfert :

$$\mathbb{E}[X] = \alpha \cdot \mathbb{P}[X = \alpha] = \alpha.$$

2. Par la définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\alpha \cdot f(X) + \beta \cdot g(Y)\big] &= \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \Big[\alpha \cdot f\big(X(\omega)\big) + \beta g\big(Y(\omega)\big)\Big]\\ &= \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \cdot \alpha \cdot f\big(X(\omega)\big) + \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \cdot \beta \cdot g\big(Y(\omega)\big)\\ &= \alpha \cdot \mathbb{E}\big[f(X)\big] + \beta \cdot \mathbb{E}\big[g(Y)\big].\end{aligned}$$

3. Par la formule de transfert, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[f(X) \cdot g(Y)\big] &= \sum_{x\in E_1}\sum_{y\in E_2} f(x) \cdot g(y) \cdot \mathbb{P}[X = x, Y = y]\\ &= \sum_{x\in E_1}\sum_{y\in E_2} f(x) \cdot g(y) \cdot \mathbb{P}[X = x] \cdot \mathbb{P}[Y = y]\\ &= \sum_{x\in E_1} f(x)\mathbb{P}[X = x] \cdot \sum_{y\in E_2} g(y)\mathbb{P}[Y = y]\\ &= \mathbb{E}\big[f(X)\big] \cdot \mathbb{E}\big[g(Y)\big].\end{aligned}$$

□

En temps continu

Définition A.2.6. Soient $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire à densité φ_X dans $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$, une fonction continue et positive. Si X est intégrable, alors on définit l'espérance de $f(X)$ par :

$$\mathbb{E}\big[f(X)\big] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi_X(x)dx.$$

Remarques A.2.7.

Les propriétés de l'espérance étudiées en temps discret, restent vraies en temps continu.
Si $f(X) = Y$, alors on parle de la moyenne de Y qui vaut $\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \varphi_Y(x)dx$.

A.3 Fonction de répartition

En temps discret

Définition A.3.1. (Fonction de répartition). Soit $X : \Omega \to \mathbb{E}$, une variable aléatoire discrète, intégrable, à valeurs dans $E \subseteq \mathbb{R}$ dénombrable. On définit sa fonction de répartition $\Phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ par :

$$\Phi(t) = \sum_{k \leq t} \mathbb{P}[X = k].$$

Remarque A.3.2. Nous pouvons écrire : $\Phi(t) = \mathbb{P}[X \leq k]$.

Propriété A.3.3. (Égalité de la fonction de répartition). Soit $X : \Omega \to \mathbb{E}$, une variable aléatoire discrète, intégrable, à valeurs dans $E \subseteq \mathbb{R}$ dénombrable. On pose sa fonction de répartition Φ. On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(t) = 1 - \sum_{k \geq t} \mathbb{P}[X = k].$$

Démonstration. Nous savons que $\Phi(t) = \sum_{k \leq t} \mathbb{P}[X = k]$. De plus, nous avons :

$$\sum_{k \leq t} \mathbb{P}[X = k] + \sum_{k \geq t} \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k \in E} \mathbb{P}[X = k] = 1.$$

D'où l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}[X \leq t] = 1 - \sum_{k \geq t} \mathbb{P}[X = k].$$

□

En temps continu

Définition A.3.4. (Fonction de répartition). Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire à densité φ dans $\mathbb{R}$. On définit sa fonction de répartition $\Phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ par :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)dx.$$

Remarque A.3.5. La propriété de la fonction de répartition reste vraie.

A.4 Fonction caractéristique

Définition et propriété

Définition A.4.1. Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire à densité dans $\mathbb{R}$. On définit sa fonction caractéristique $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\phi(t) = \mathbb{E}\big[e^{\mathrm{i}tX}\big].$$

Remarque A.4.2. Dans ce rapport, nous n'avons besoin de cette notion que pour les variables aléatoires à densité. Cependant, il est intéressant de savoir que pour les variables aléatoires discrètes, nous parlons de fonction génératrice.

Propriété A.4.3. Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire à densité dans $\mathbb{R}$ dont la fonction caractéristique est notée ϕ_X. On pose $Y = \alpha X + \beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\phi_Y(t) = e^{\mathrm{i}t\beta} \cdot \phi_X(\alpha t).$$

Démonstration. Par définition, nous savons que :

$$\begin{aligned}\phi_Y(t) &= \mathbb{E}\big[e^{\mathrm{i}tY}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[e^{\mathrm{i}t(\alpha X+\beta)}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[e^{\mathrm{i}t\alpha X} \cdot e^{\mathrm{i}t\beta}\big].\end{aligned}$$

Cependant le terme $e^{\mathrm{i}t\beta}$ est une constante, d'où :

$$\phi_Y(t) = e^{\mathrm{i}t\beta} \cdot \mathbb{E}\big[e^{\mathrm{i}t\alpha X}\big].$$

Ici, nous pouvons simplement remarquer que :

$$\mathbb{E}\big[e^{\mathrm{i}t(\alpha X)}\big] = \mathbb{E}\big[e^{\mathrm{i}(t\alpha)X}\big].$$

Donc nous avons l'égalité suivante :

$$\phi_{\alpha X}(t) = \phi_X(\alpha t),$$

ce qui permet d'écrire que :

$$\phi_Y(t) = e^{\mathrm{i}t\beta} \cdot \phi_X(\alpha t).$$

□

Théorèmes associés

Théorème A.4.4. (Variables aléatoires indépendantes). Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une famille de variables aléatoires i.i.d. et $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors la fonction caractéristique de S est le produit des fonctions caractéristiques des X_i :

$$\phi_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}\phi_S(t) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{i}tX_i\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{\mathrm{i}tX_i}\right].\end{aligned}$$

Or $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ regroupe des variables aléatoires indépendantes, donc selon l'une des propriétés de l'espérance A.2.5, nous avons :

$$\phi_S(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\mathrm{i}tX_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}.$$

□

Théorème A.4.5. (Unicité). Soient $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux variables aléatoires à densité dans $\mathbb{R}$, dont les fonctions caractéristiques associés sont ϕ_X et ϕ_Y. On a alors :

$$\phi_X = \phi_Y \iff X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi}\,.$$

Théorème A.4.6. (Dérivée n-ième). Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire à densité dans $\mathbb{R}$ dont la fonction caractéristique est notée ϕ. Si X admet un moment d'ordre $n \geq 1$, alors :

$$\phi \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}) \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R}, \phi^{(n)}(t) = \mathrm{i}^n \mathbb{E}\left[X^n e^{\mathrm{i}tX}\right].$$

Remarque A.4.7. En particulier pour $t = 0$, on a $\phi^{(n)}(0) = \mathrm{i}^n\mathbb{E}\big[X^n\big]$.

Démonstration. Supposons que X admette une densité φ. Nous avons par définition :

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx}\varphi(x)dx.$$

Nous allons utiliser le théorème suivant :

Théorème : *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, une fonction. Si nous avons à la fois :*

1. *La fonction f est de classe $\mathscr{C}^n, n \in \mathbb{N}$;*
2. *L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)dx$ normalement convergente sur $\mathbb{R}$;*
3. *L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,a)dx$ convergente sur $\mathbb{R}$, pour $a \in \mathbb{R}$;*

alors la fonction $I(t) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx$ définit une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$I^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)dx.$$

Afin d'appliquer ce théorème et de répondre au problème, on pose la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, telle que :

$$f(x,t) = e^{\mathrm{i}tx}\phi(x).$$

Nous pouvons appliquer ce théorème à cette fonction car :

1. La fonction f est continuement dérivable puisqu'elle correspond au produit de deux fonctions continuement dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)dx$ converge normalement car :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)\right| &= \big|(\mathrm{i}x)^n e^{\mathrm{i}tx}\varphi(x)\big| \\ &= \big|(\mathrm{i}x)^n\big| \cdot \big|\varphi(x)e^{\mathrm{i}tx}\big|.\end{aligned}$$

   Il faut calculer le module des deux nombres complexes, d'où :

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)\right| = \big|x^n\big| \cdot \big|\varphi(x)\big|.$$

Cependant, nous savons par définition que la fonction densité φ est positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)\right| = |x^n|\varphi(x).$$

Puisque selon la condition du théorème, X admet un moment d'ordre n, alors :

$$\int_{\mathbb{R}} |x^n|\varphi(x)dx \text{ converge.}$$

Nous avons donc trouvé une fonction g telle que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)\right| \leq g(x) \text{ et } \int_{\mathbb{R}} g(x)dx \text{ converge.}$$

Ceci montre bien la convergence normale de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)$.

3. L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,a)dx$ converge pour $a = 0$ puisque selon la définition de la fonction densité :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,0)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1.$$

Par conséquent, grâce au théorème, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\phi^{(n)}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x,t)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{i}x)^n e^{\mathrm{i}tx}\varphi(x)dx \\
&= \mathrm{i}^n\mathbb{E}\big[X^n e^{\mathrm{i}tX}\big].
\end{aligned}$$

□

A.5 La loi normale

Sa fonction densité

Définition A.5.1. (Fonction densité). Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ (de moyenne μ et d'écart-type σ). On définit sa fonction densité $\varphi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}$ par :

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Démonstration. Afin de prouver qu'il s'agit bien d'une fonction densité, il faut montrer qe $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(x)dx =$ 1. Procèdons premièrement au changement de variable suivant :

$$y = \frac{x_\mu}{\sigma}.$$

Nous avons donc :

$$x = \mu + \sigma \cdot y, \qquad dy = \frac{1}{\sigma}dx, \qquad \big(x \to \pm\infty\big) \Rightarrow \big(y \to \pm\infty\big).$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(x)dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \sigma dy \qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.
\end{aligned}$$

Étudions désormais l'intégrale $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy$. On procède au changement de variable suivant :

$$u = \frac{y}{\sqrt{2}},$$

ce qui nous donne :

$$y = \sqrt{2}u, \qquad dy = \sqrt{2} \cdot du, \qquad \big(y \to \pm\infty\big) \Rightarrow \big(u \to \pm\infty\big).$$

On a donc :

$$I = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du.$$

Voyons ici le carré de cette intégrale :

$$\begin{aligned} I^2 &= 2 \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} dv \\ &= 2 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(u^2+v^2)} du \cdot dv. \end{aligned}$$

On passe alors aux coordonnées polaires pour exprimer l'ensemble $A := \big\{u^2+v^2 \geq 0 : (u,v) \in \mathbb{R}^2\big\}$. Nous avons alors $A = \big\{r \geq 0 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi : (r,\theta) \in \mathbb{R}^2\big\}$. On rappelle aussi que $du \cdot dv$ devient $r \cdot dr \cdot d\theta$ en coordonnées polaires. Par conséquent :

$$I^2 = 2 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} r \cdot dr \cdot d\theta \qquad = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 4\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} \qquad = 4\pi \cdot \frac{1}{2} = 2\pi.$$

D'où l'intégrale $I = 2\pi$. En reprenant notre intégrale initiale, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1.$$

□

Sa fonction de répartition

Propriété A.5.2. (Propriété de la fonction de répartion de la loi normale centrée réduite). Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}$, sa fonction de répartition. Nous avons alors pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = 1 - \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(-t).$$

Démonstration. Grâce à la définition de la fonction de répartition A.3.4, nous savons que :

$$\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx,$$

avec $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.
Si l'on procède au changement de variable suivant :

$$u = -x,$$

nous avons donc :

$$x = -u, \qquad dx = -du, \qquad \big(x \to -\infty\big) \Rightarrow \big(u \to +\infty\big), \qquad \big(x) = t\big) \Rightarrow \big(u = -t\big).$$

Ainsi, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-t} e^{-u^2/2}(-du)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-t} e^{-u^2/2} du.\end{aligned}$$

Par la relation de Chasles, nous avons :

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-u^2/2} du + \int_{-\infty}^{-t} e^{-u^2/2} du \right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-t} e^{-u^2/2} du.\end{aligned}$$

Cependant, par définition de la fonction densité, nous savons que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = 1.$$

Ainsi nous avons :

$$\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-t} e^{-u^2/2} du.$$

Ici nous reconnaissons la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (cf. la définition A.3.4) évaluée en $-t$, ce qui donne bien :

$$\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = 1 - \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(-t).$$

□

Sa fonction caractéristique

Théorème A.5.3. (Fonction caractéristique). Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Sa fonction caractéristique $\phi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}$ vaut alors :

$$\varphi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(t) = \exp\left(\mathrm{i}t\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2} \right).$$

Démonstration. Montrons tout d'abord ce que vaut la fonction caractéristique $\phi_{\mathcal{N}(0,1)}$ de la loi normale centrée réduite, avec $\varphi_{\mathcal{N}(0,1)}$ sa fonction densité. Posons Y, la variable aléatoire qui suit cette loi.
Dans un premier temps, nous allons exprimer la dérivée de $\phi_{\mathcal{N}(0,1)}$. Ensuite, nous étudirons cette dérivée pour obtenir $\phi_{\mathcal{N}(0,1)}$.
À partir du théorème A.4.6, nous pouvons obtenir $\phi'_{\mathcal{N}(0,1)}$. Nous devons cependant montrer que Y admette un moment d'ordre 1. C'est bien le cas puisque le moment d'ordre 1 d'une variable aléatoire correspond à sa moyenne et que, par définition :

$$\mathbb{E}[Y] = 0, \quad \text{car} \quad Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi nous pouvons bien appliquer le théorème A.4.6 :

$$\phi'_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \mathrm{i}\mathbb{E}\big[Y e^{\mathrm{i}tY}\big].$$

Si nous posons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, telle que :

$$f(x) = x \cdot e^{\mathrm{i}tx},$$

alors nous savons (cf. définition A.2.6 de l'espérance d'une fonction) que :

$$\mathbb{E}\big[f(Y)\big] = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(x) dx.$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}\phi'_{\mathcal{N}(0,1)}(t) &= \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx \\ &= \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} x\cdot e^{\mathrm{i}tx}\cdot \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(x)dx.\end{aligned}$$

Or nous connaissons l'expression de la fonction densité de Y (cf. définition A.5.1), d'où :

$$\phi'_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x\cdot e^{\mathrm{i}tx}\cdot e^{-x^2/2}dx.$$

Étudions désormais l'intégrale suivante :

$$I := \int_{\mathbb{R}} x\cdot e^{\mathrm{i}tx}\cdot e^{-x^2/2}dx,$$

en effectuant une intégration par partie. On pose alors :

$$\begin{cases} u(x) &= e^{\mathrm{i}tx} \\ v(x) &= -e^{-x^2/2}\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} u'(x) &= \mathrm{i}t\cdot e^{\mathrm{i}tx} \\ v'(x) &= x\cdot e^{-x^2/2}\end{cases}.$$

Nous avons donc :

$$I = \left[-e^{\mathrm{i}tx}\cdot e^{-x^2/2}\right]_{\mathbb{R}} + \mathrm{i}t\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx}\cdot e^{-x^2/2}dx.$$

Cependant :

$$\begin{aligned}\left[-e^{\mathrm{i}tx}\cdot e^{-x^2/2}\right]_{\mathbb{R}} &= \left[-e^{\mathrm{i}tx-x^2/2}\right]_{\mathbb{R}} \\ &= -\left[\exp\left(x\cdot\left(\mathrm{i}t-\frac{x}{2}\right)\right)\right]_{\mathbb{R}} \\ &= -\lim_{A\to+\infty}\left[\exp\left(x\cdot\left(\mathrm{i}t-\frac{x}{2}\right)\right)\right]_{-A}^{+A} \\ &= -\lim_{A\to+\infty}\left[\exp\left(A\cdot\left(\mathrm{i}t-\frac{A}{2}\right)\right)-\exp\left(-A\cdot\left(\mathrm{i}t+\frac{A}{2}\right)\right)\right] \\ &= -(0-0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où :

$$I = \mathrm{i}t\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx}\cdot e^{-x^2/2}dx.$$

Maintenant que nous connaissons l'expression de I, nous pouvons l'introduire dans le calcul de $\phi'_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2\pi}}\cdot I$:

$$\begin{aligned}\phi'_{\mathcal{N}(0,1)}(t) &= \frac{t\mathrm{i}^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx-x^2/2}dx \\ &= -\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}tx-x^2/2}dx.\end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de la fonction caractéristique $\phi_{\mathcal{N}(0,1)}$. Ainsi :

$$\phi'_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = -t\cdot\phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t).$$

Par conséquent, il nous reste à résoudre cette équation différentielle pour obtenir $\phi_{\mathcal{N}(0,1)}$. Or nous connaissons l'ensemble des solutions de cette équation :

$$\phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = \lambda e^{-t^2/2},\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

De plus $\phi_{\mathcal{N}(0,1)}(0) = \lambda = 1$, ainsi l'on a la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite :

$$\phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t) = e^{-t^2/2}.$$

Maintenant, pour calculer la fonction caractéristique de $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, on utilise la relation $X = \mu + \sigma Y$, avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc :

$$\phi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(t) = \phi_{\mu+\sigma Y}(t).$$

Or selon la propriété de la fonction caractéristique A.4.3, nous avons :

$$\phi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(t) = e^{\mathrm{i}t\mu} \cdot \phi_{\mathcal{N}(0,1)}(t\sigma).$$

Nous utilisons donc l'expression de $\phi_{\mathcal{N}(0,1)}$ que nous venons de calculer :

$$\phi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(t) = e^{it\mu} \cdot e^{-(t\sigma)^2/2}.$$

On a donc bien :

$$\phi_{\mathcal{N}(\mu,\sigma)}(t) = \exp\left(\mathrm{i}t\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right).$$

□

A.6 Convergence en loi

Définition A.6.1. (Convergence en loi). Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de variables aléatoires à densité dans $\mathbb{R}$ et X, une variable aléatoire également à densité dans $\mathbb{R}$. On note ϕ_{X_n} et ϕ_X, leur fonction respective. On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \phi_{X_n}(t) = \phi_X(t) \iff X_n \text{ converge en loi vers } X.$$

Théorème A.6.2. (Espérance d'une variable aléatoire convergente). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à densité dans $\mathbb{R}$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X lorsque :

$$\forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue et bornée, } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big[g(X_n)\big] = \mathbb{E}\big[g(X)\big].$$

A.7 Développement limité

Théorème A.7.1. (Formule de Taylor-Lagrange). Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $(x_0 + h) \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que l'on ait :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

Remarque A.7.2. Lorsque nous ferons appel à cette formule, on l'utilisera sous une autre forme, calculée comme ceci : on ajoute dans la somme, le terme $k = n+1$ que nous soustrayons ensuite. Nous avons alors une forme équivalente de la formule de Taylor-Lagrange :

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\Big(f^{(n+1)}(x_0 + \theta h) - f^{(n+1)}(x_0)\Big), \text{ avec } \theta \in]0,1[.$$

Annexe B

Codes sources des illustrations

Les illustrations ont été réalisées avec le logiciel R-Studio.

B.1 Évolution de S_t en fonction de N (figure 3.1)

```
#Données
N=50 #ou bien 500, 5000, 50000
sigma=1
r=0.1
S0=100
T=2

#Calculs àpartir des données
u=exp(r/N+sigma/sqrt(N)) #En effet, ξk = ln(r/N + ηk)
d=exp(r/N-sigma/sqrt(N))
p=0.5-sigma/(3*sqrt(N)) #Valeur proche de q
S=numeric(N*T) #Le vecteur qui contiendra toutes les valeurs de St
E<-rbinom(N*T,1,p) #Le vecteur qui contiendra les valeurs prises par les ξk
temps=(1:(N*T))/N #Le vecteur qui constitue l'abscisse du graphe

#Construction du vecteur E
for(i in 1:(N*T)){
  if(E[i]==0) E[i]=d else E[i]=u
  }

#Construction du vecteur S
S[1]=S0*E[1]
for(i in 2:(N*2)){
  S[i]=S[i-1]*E[i]
        }
S[N*T] #Affiche le prix de l'action àl'échéance

#Affichage du graphe
plot(temps, S, type="l",
              main=expression(paste("Evolution ","de ",S[t]," pour ",N==50)),
              ylab="Montant de l'actif risqué (€)",
              xlab="Temps")
```

B.2 Situations lors d'une option d'achat (figures 3.2 et 3.3)

```
#Données
N=200
sigma=1
r=0.1
S0=100
T=2
strike=90

#Calculs àpartir des données
alpha=exp(r/N)
u=exp(r/N+sigma/sqrt(N))
d=exp(r/N-sigma/sqrt(N))
q=(alpha-d)/(u-d) #Voici une autre manière de calculer la probabilité q,
#on utilise sa définition donnée dans la partie 'Initialisation de la propriété'
#de la section 2.3
TN=T*N #Pour nous éviter d'écrire T*N
S=numeric(TN+1) #Le vecteur qui contiendra toutes les valeurs de St
E<-rbinom(TN,1,q) #Le vecteur qui contiendra les valeurs prises par les ξk
Xt=numeric(TN+1) #Le vecteur qui contiendra toutes les valeurs de Xt
temps=(0:TN)/N #Le vecteur qui constitue l'abscisse du graphe

#Fonction payoff correspondant àfc (cf. (1.1) )
f<-function(s,k){
  max(s-k,0)
}

#Fonction F introduite dans la section 2.4
F<-function(t,s)
{
  x=TN-t
  SOMME=0
  for(l in 0:x){
    gain=f(s*d^(TN-t-l)*u^(l),strike)
    SOMME=SOMME+dbinom(l,size=TN-t,prob=q)*gain
  }
  alpha^(-TN+t)*SOMME
}

#Construction du vecteur E
for(i in 1:TN){
  if(E[i] ==0) {E[i]=d} else {E[i]=u}
}

#Construction du vecteur S
S[1]=S0
for(i in 2:(TN+1)){
  S[i]=S[i-1]*E[i-1]
}

#Construction du vecteur Xt
for(i in 1:(TN+1)){
  Xt[i]=F(i-1,S[i])
}

#Calcul du bénéfice Be
if(S[TN+1]>(strike+Xt[1])) {
  Be= S[TN+1]-Xt[1]-strike
}else {
```

```
   Be= -Xt[1]
   }

#Afficher les résultats
S[TN+1] #Le prix de l'action àl'échéance S_T
Xt[TN+1] #Le montant du portefeuille du vendeur
Xt[1] #Le montant de la prime x
Be #Le bénéfice de l'acheteur

#Affichage des graphes
par(mfrow=c(1,2))
plot(temps,S, type="l",
     main=expression(paste("Dynamique ","de ",S[t])),
     ylab="Prix de l'action",
     xlab="Temps") #graphe du vecteur S
abline(h=(strike-Xt[1]),col="red") #droite qui représente la valeur
#de K − x ajoutée sur le graphe du vecteur S
plot(temps,Xt,type="l",
     main=expression(paste("Progression ","de ",X[t])),
     ylab="Montant du portefeuille",
     xlab="Temps") #graphe du vecteur Xt
```

B.3 Convergence en loi de la variable aléatoire $U_T^{(N)}$ (figure 3.4)

```
#Données
N=9
M=3 #Le nombre de variables UT
S0=100
sigma=1
r=0.1
T=2

#Calculs àpartir des données
u=exp(r/N+sigma/sqrt(N))
d=exp(r/N-sigma/sqrt(N))
q=0.5-sigma/(4*sqrt(N))
TN=T*N
eta=numeric(TN)
S=numeric(M) #Vecteur qui contiendra tous les UT
mu=-T*sigma^2/2 #Moyenne de la loi normale
ecart_type=sqrt(T)*sigma #Ecart-type de la loi normale
Y<-dnorm(seq(mu-6,mu+6,0.001),log=FALSE,
        mean=mu,
        sd=ecart_type)

#Construction du vecteur S
for(i in 1:M){
  #Construction du vecteur E et eta
  E<-rbinom(TN,size=1, prob=q)
  for(j in 1:TN){
    if(E[j]==0){E[j]<-d} else {E[j]<-u}
    eta[j]<-log(E[j])-r/N
  }
  #Construction de la variable UT
  U=0
  for(k in 1:TN){
    U=U+eta[k]
  }
  S[i]=U
}
```

```
#Affichage du graphe
#Histogramme de S
hist(S,breaks=40,freq=FALSE,right=FALSE,
    main=expression(paste('Convergence ','en ','loi ','de ',U[T]^{(N)})),
    ylab='Densité',xlab=' ')
#Courbe de la fonction densité de la loi normale
lines(seq(mu-6,mu+6,0.001),Y,col='red')
```
\ $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ &

Bibliographie

[1] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, pages 637–654, May-June 1973.

[2] L. Breiman. *Probability*. SIAM, 1992.

[3] C. Chorro. Introduction à la théorie des options financières, 16 Janvier 2008.

[4] J. Cox, S. Ross, and M. Rubinstein. Option pricing : a simplified approach. *Journal of Financial Economics*, pages 229–263, July 1979.

[5] M. Diener. Black-Scholes comme limite de CRR. <`math.unice.fr/~diener/L3MASS08/chap8.pdf`>.

[6] F. Malrieu. Prix d'options européennes, Avril 2007.

[7] J.-Y. Ouvrard. *Probabilité 1*. CASSINI, 2009.

[8] J.-Y. Ouvrard. *Probabilité 2*. CASSINI, 2009.