Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1G

Groupes Classiques et Géométrie

EXAMEN

4 Juin 2019

Durée : 3h

Exercice. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q, et m, n, r trois entiers positifs, avec $r \leq m$, $r \leq n$. Le but de cet exercice est de calculer le cardinal de l'ensemble des matrices de rang r de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On notera

$$\mathrm{I}_{m,n,r} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de rang r de forme normale dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Pour tout entier positif a, on définit le nombre factoriel quantique :

$$[a]_q! = \prod_{k=1}^{a}(1 + q + \cdots + q^{k-1}).$$

1. Pourquoi a-t-on l'égalité $|\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})| = q^{nm}$?
2. Montrer (on demande la preuve complète) que le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est égal à
$$g_n := q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q-1)^n[n]_q!$$
3. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_{m,n}$ pour l'opération $(P,Q)\cdot A = PAQ^{-1}$.
4. Enoncer le théorème d'algèbre linéaire qui permet d'affirmer que l'ensemble $\mathcal{O}_r$ des matrices de rang r est l'orbite de $\mathrm{I}_{m,n,r}$ pour cette action.
5. Montrer que le stabilisateur de $\mathrm{I}_{m,n,r}$ est en bijection avec
$$(\mathcal{M}_{r,m-r}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})) \times \big(\mathrm{GL}_r(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_{m-r}(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{K})\big).$$
6. On pose, pour tout entier a, $\tau(a) := \frac{a(a-1)}{2}$. A l'aide de la formule (que l'on ne demande pas de prouver) $\tau(a+b) = \tau(a) + ab + \tau(b)$, montrer que le nombre de matrices de taille $m \times n$ de rang r sur $\mathbb{K}$ est
$$g_r\frac{[m]_q!}{[r]_q![m-r]_q!}\cdot\frac{[n]_q!}{[r]_q![n-r]_q!}.$$

7. (Questions bonus) Au fait, comment pouvait-on prévoir que cette formule allait être symétrique en m et n ? En pensant à l'isomorphisme canonique associé à une application linéaire, donner une interprétation élégante de cette formule.

Problème.

Le but de cet exercice est d'exhiber un isomorphisme *exceptionnel* entre $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$ et $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$.

On note $\mathcal{A}_4$ le sous-espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ formé des matrices antisymétriques

$$A(a,b,c,d,e,f) = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où } \ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C}.$$

On pourra admettre le résultat suivant obtenu par force brute :

$$\det(A) = a^2f^2 + b^2e^2 + c^2d^2 - 2abef + 2acdf - 2bcde.$$

On introduit le pfaffien d'une telle matrice antisymétrique. Le pfaffien est l'application

$$\mathrm{Pf} \,:\, \mathcal{A}_4 \to \mathbb{C},\ \ A(a,b,c,d,e,f) \mapsto af - be + cd.$$

1. Montrer l'égalité
$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A).$$
2. On suppose ici que A est une matrice antisymétrique *inversible*. Montrer que l'application
$$\kappa \,:\, \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \to \{\pm 1\}, P \mapsto \frac{\mathrm{Pf}(PA\,{}^tP)}{\mathrm{Pf}(A)}$$
est bien définie (on montrera, entre autres, qu'elle est bien à valeurs dans $\{\pm 1\}$).
3. Le but de cette question est de montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, pour l'action naturelle.
   (b) On suppose $n \geq 2$. Déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$.
   (c) Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Montrer que le stabilisateur de e_1 pour cette action de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{SL}_{n-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n-1}$.
   (d) Montrer par une récurrence que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.
4. Montrer alors que κ est constante. En déduire que pour toute matrice antisymétrique A et toute matrice P de $SL_4(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Pf}(PA\,{}^tP) = \mathrm{Pf}(A)$.

   On pourra commencer par le cas où A est inversible.
5. On considère l'action (à gauche) de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ par congruence sur $\mathcal{A}_4(\mathbb{C})$ et le morphisme d'action $\phi : \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{A}_4(\mathbb{C}))$ qui en résulte, c'est-à-dire $\phi(P)(A) = PA^tP$.

   (a) Montrer que le pfaffien est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathcal{A}_4$. On notera $\mathrm{O}(\mathrm{Pf})$ le groupe qui stabilise cette forme.
   (b) Déduire que $\mathrm{Im}\,\phi \subset \mathrm{O}(\mathrm{Pf})$, et que $\mathrm{O}(\mathrm{Pf})$ est un groupe isomorphe à $\mathrm{O}_6(\mathbb{C})$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}\,\phi$ est un sous-groupe d'un groupe isomorphe à $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$.

6. On veut montrer que $\mathrm{Ker}\phi = \{\pm\,\mathrm{Id}\}$. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\phi)$.
   (a) En utilisant le fait que $PB^tP = B$, avec
   $$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   montrer que ${}^tP$ laisse fixe le sous-espace $\langle e_3, e_4 \rangle$.

   Indication : que représente ce sous-espace par rapport à la forme quadratique définie par B ?
   (b) Déduire que ${}^tP$ laisse fixe tout plan, puis, toute droite.
   (c) Conclure que $\mathrm{Ker}\phi = \{\pm\,\mathrm{Id}\}$.
7. Décrire les espaces tangents en l'identité $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$, pour $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$, et $\mathfrak{so}_6(\mathbb{C})$, pour $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$, comme sous-espaces respectifs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$. Donner ensuite leur dimension sur $\mathbb{C}$.
8. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ sur $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$.

   On pourra se servir du résultat suivant : si un morphisme de groupes de Lie possède un noyau discret alors sa différentielle est injective.
9. En déduire pour finir un isomorphisme entre $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})/\{\pm\,\mathrm{Id}\}$ et $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$.