

Correction Examen GCG Juin 2019

Exercice.

1. On a $\dim \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) = mn$, et donc la bijection (en fait l'isomorphisme) $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{mn}$. Il vient $|\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})| = q^{nm}$.
2. C'est une question de cours (mais aussi une question de vie ou de mort en Master de Lyon 1) déjà bien étudiée ! Si on fixe une base \mathcal{B}_0 de \mathbb{K}^n , l'application qui envoie une base quelconque \mathcal{B} de \mathbb{K}^n sur la matrice de passage de \mathcal{B}_0 vers \mathcal{B} est une bijection. Il y a donc autant d'éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ que de bases de \mathbb{K}^n . Or, ce nombre est égal à $(q^n - 1) \cdots (q^n - q^{n-1})$, qui est aussi égal à $q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1) \cdots (q - 1)$. On finit en remarquant que, par la formule de la série géométrique, $q^k - 1 = (q - 1)(1 + q + \cdots + q^{k-1})$.
3. Le groupe $\text{GL}_m(\mathbb{K}) \times \text{GL}_n(\mathbb{K})$ a pour élément neutre (I_m, I_n) . On voit que $(I_m, I_n) \cdot A = A$. De plus, d'une part :

$$(P, Q) \cdot ((P', Q') \cdot A) = P (P' A Q'^{-1}) Q^{-1} = (PP') A (QQ')^{-1}.$$

D'autre part,

$$((P, Q)(P', Q')) \cdot A = (PP', QQ') \cdot A = (PP') A (QQ')^{-1}.$$

Cela conclut notre affaire.

4. « Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang ».
5. Le couple (P, Q) stabilise $I_{m,n,r}$ si et seulement si

$$\begin{aligned} PI_{m,n,r}Q^{-1} = I_{m,n,r} &\iff \\ &\iff \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff A = A' \text{ et } C = 0 \text{ et } B' = 0 \\ &\iff P = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque le déterminant de P (resp. Q) est ici le produit des déterminants des blocs diagonaux, P (resp. Q) est inversible si et seulement si A et D (resp. A et D') le sont. D'autre part, B (resp. C') est quelconque dans $\mathcal{M}_{r,m-r}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$). On a notre bijection.

6. Les matrices de rang r forment l'orbite de $I_{m,n,r}$. Or, l'orbite de A est en bijection avec G/G_A .

Le cardinal cherché arrive donc sous forme de fraction. Le numérateur est le cardinal du groupe : $g_m g_n$. Le dénominateur est, par la question 5,

$$q^{r(m-r)} q^{r(n-r)} g_r g_{m-r} g_{n-r}.$$

On va calculer avec méthode, selon le type de facteurs :

Les factoriels quantiques qui apparaissent sont donc

$$\frac{[m]_q! [n]_q!}{[r]_q! [m-r]_q! [n-r]_q!} = [r]_q! \frac{[m]_q! [n]_q!}{[r]_q! [r]_q! [m-r]_q! [n-r]_q!}.$$

Pour les puissances de q , on trouve q^a , avec

$$a = \tau(m) + \tau(n) - r(n-r) - (m-r)r - \tau(r) - \tau(m-r) - \tau(n-r) = \tau(r),$$

d'après la formule proposée par l'énoncé.

Pour les puissances de $(q-1)$, on trouve $m+n-r-(m-r)-(n-r)=r$. Au final, on retrouve bien la formule demandée.

7. (Questions bonus)

La symétrie entre m et n vient du fait que la transposition assure une bijection entre les matrices $m \times n$ de rang r et les matrices $n \times m$ de rang r .

Cette formule sur le nombre de matrices de rang r dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ peut être facilement interprétée. Voyez plutôt : une application linéaire φ d'un espace E de dimension n vers un espace F de dimension m fournit par passage au quotient un isomorphisme (dit canonique) $\bar{\varphi} : E/\text{Ker}(\varphi) \simeq \text{Im}(\varphi)$. Si on note que $\text{Ker}(\varphi)$ est de codimension r et $\text{Im}(\varphi)$ est de dimension r , on comprendra alors qu'une telle application linéaire est caractérisée par la donnée de (i) un isomorphisme (l'isomorphisme canonique) d'un espace de dimension r dans un espace de dimension r , (ii) un sous-espace (le noyau) de dimension $n-r$ de E , et (iii) un sous-espace (l'image) de dimension r de F . La formule découle alors directement du calcul du nombre de sous-espaces de dimension donnée en cours.

Problème.

1. C'est juste la formule $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.
2. Tout d'abord, comme A est inversible, $\text{Pf}(A)^2 = \det(A) \neq 0$. D'autre part,

$$\left(\frac{\text{Pf}(PA^tP)}{\text{Pf}(A)} \right)^2 = \frac{\det(PA^tP)}{\det(A)} = 1,$$

car $\det(P) = \det^t P = 1$. Il vient donc

$$\frac{\text{Pf}(PA^tP)}{\text{Pf}(A)} = \pm 1.$$

3. (a) C'est le théorème de la base incomplète. On part de u et u' non nuls. On peut les compléter respectivement en une base \underline{e} et une base \underline{e}' . On peut trouver un $g \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ qui envoie l'une vers l'autre, par le théorème fondamental de l'algèbre linéaire. Cet élément g envoie donc u sur u' .
- (b) On part encore une fois de u et u' non nuls et on trouve g comme précédemment tel que $g(u) = u'$ et de déterminant non nul λ . Soit $d := \text{diag}(1, \dots, 1, \lambda^{-1})$. On vérifie alors que $g' := gd$ est dans $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ et il envoie toujours u sur u' (c'est-à-dire le premier vecteur de la base \underline{e} sur le premier vecteur de la base \underline{e}').
- (c) Un élément qui stabilise e_1 est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & A \end{pmatrix},$$

avec $v \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Par un calcul par blocs de déterminant, on trouve $A \in \text{SL}_{n-1}(\mathbb{C})$. Réciproquement, une matrice de cette forme, avec $v \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $A \in \text{SL}_{n-1}(\mathbb{C})$ est bien dans $\text{SL}_n(\mathbb{C})$ et stabilise e_1 . D'où l'assertion.

- (d) Pour $n = 1$, on a $\text{SL}_1(\mathbb{C}) = \{1\}$ qui est connexe. Montrons alors l'hérédité. On suppose que $\text{SL}_{n-1}(\mathbb{C})$ est connexe. On a donc $H := \text{SL}_{n-1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n-1}$ connexe. Soit $G = \text{SL}_n(\mathbb{C})$. On vérifie les hypothèses du théorème d'homéomorphisme (dénombrabilité à l'infini et locale compacité), pour affirmer que G/H est homéomorphe à $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, qui est connexe. Donc, H et G/H sont connexes et on sait que cela implique G connexe.

4. L'application κ est continue puisque c'est une fraction rationnelle sur son ensemble de définition. L'image du connexe $\text{SL}_4(\mathbb{C})$ est donc un connexe de $\{\pm 1\}$. Cette valeur est donc celle que l'on trouve en prenant pour P la matrice identité, c'est-à-dire 1. Donc, si A est inversible, $\text{Pf}(PA^tP) = \text{Pf}(A)$. Si A n'est pas inversible, son déterminant est nul et donc $\text{Pf}(PA^tP)$ et $\text{Pf}(A)$ sont tous deux nuls, d'où l'égalité¹.

5. (a) La fonction $(a, b, c, d, e, f) \mapsto af - be + cd$ est un polynôme homogène de degré 2. C'est donc bien une forme quadratique. Elle est non dégénérée par la méthode de Gauss qui fournit la décomposition en somme de carrés de formes linéaires indépendantes :

$$af - be + cd = \frac{1}{4} \left((a + f)^2 - (a - f)^2 + (b + e)^2 - (b - e)^2 + (c + d)^2 - (c - d)^2 \right).$$

Le rang de la forme est donc 6 ; la forme quadratique est non dégénérée.

- (b) Comme $\text{Pf}(\phi(P)(A)) = \text{Pf}(PA^tP) = \text{Pf}(A)$, il vient que $\phi(P) \in \text{O}(\text{Pf})$. Comme on est sur \mathbb{C} , les classes de congruence sont caractérisées par le rang, et comme Pf est de rang 6, la forme quadratique Pf est congruente à la forme quadratique canonique de \mathbb{C}^6 . Ceci implique que leurs groupes sont conjugués et en particulier, $\text{O}(\text{Pf})$ est isomorphe à $\text{O}_6(\mathbb{C})$.

1. On peut également conclure avec un argument de continuité en se servant du fait que $\text{GL}_4(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

- (c) Comme on vient de le voir, $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ est connexe, et par continuité, le morphisme ϕ envoie $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ sur un connexe, et, comme l'identité est toujours dans l'image d'un morphisme, $\phi(\mathrm{SL}_4(\mathbb{C}))$ est dans la composante connexe de l'identité.
6. (a) La matrice B est de rang 2 et $\langle e_3, e_4 \rangle$ est dans le noyau de la forme quadratique (on voit sur la matrice qu'elle est bien orthogonale à E). Donc, $\langle e_3, e_4 \rangle$ est le noyau de la forme quadratique.
On suppose que tP laisse fixe B . Alors, si q est la forme quadratique canoniquement associée à B , on a $q({}^tPu) = q(u)$ pour tout vecteur u et pour tout P . De plus, si b est la forme polaire associée à q , $b({}^tPu, {}^tPv) = b(u, v)$. Si v est dans $\langle e_3, e_4 \rangle$, alors $b({}^tPu, {}^tPv) = b(u, v) = 0$, et donc tPv est encore dans le noyau de b , ce qui prouve que tP stabilise $\langle e_3, e_4 \rangle$.
- (b) Pour tout plan Π de \mathbb{C}^4 , on peut trouver B symétrique dont le noyau est Π . Il en résulte que si tP stabilise B , tP laisse fixe Π . Donc, tP laisse fixe tout plan. Et comme toute droite peut être vue comme intersection de deux plans, toute droite est fixée par tP .
- (c) On sait que tout endomorphisme φ qui laisse fixe toutes les droites est une homothétie. En effet, l'hypothèse implique que pour tout vecteur u ,

$$\varphi(u) = \lambda_u u$$

pour un λ_u dans u . Si v n'est pas colinéaire à u alors, en posant $w := u + v$

$$\lambda_w u + \lambda_w v = \lambda_w w = \varphi(w) = \varphi(u) + \varphi(v) = \lambda_u u + \lambda_v v,$$

ce qui prouve que $\lambda_u = \lambda_w = \lambda_v$. Donc, λ_u est indépendant de u et φ est bien une homothétie.

Comme P est une homothétie, on voit que son rapport doit être de carré égal à 1 ; on a bien $P = \pm \mathrm{Id}$ et la réciproque est claire.

7. On sait par le cours que $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ est le sous-espace des matrices de trace nulle, donc de dimension $4^2 - 1 = 15$. On sait également que $\mathfrak{so}_6(\mathbb{C})$ est le sous-espace des matrices antisymétriques, donc de dimension $\frac{6 \times 5}{2} = 15$.
8. Comme le noyau est discret (car fini d'ordre 2), la différentielle en l'identité est injective, et par égalité de dimensions, c'est un isomorphisme.
Par le théorème d'inversion locale, l'image de ϕ contient un ouvert. Comme $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$ contenant un ouvert, $\mathrm{Im}(\phi)$ est un ouvert par principe de translation. Donc, $\mathrm{Im}(\phi)$ est fermé (comme complémentaire d'un ouvert : la réunion des autres classes modulo lui-même). Donc, $\mathrm{Im}(\phi)$ étant à la fois ouvert et fermé, il est union de composantes connexes de $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$. Et comme $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$ est connexe, on ne peut avoir qu'une seule composante connexe, lui-même. On a donc $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$ et ϕ est surjective.
9. C'est juste l'isomorphisme canonique associée à un morphisme de groupes.