Mise en bouche

*** Exercice 1.** Un vecteur directeur de la droite Δ est $e = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme la droite Δ n'est pas contenue dans le plan Π, $\mathbb{R}^3 = \Delta \oplus \Pi$.

1. La projection u envoie le point P de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base canonique sur le point $u(\mathrm{P})$ dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base canonique sont caractérisés par les deux conditions suivantes :
   (i) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (ii) $x' + 3y' + 5z' = 0$.

   Remarque : *la première condition traduit le fait que le point $u(\mathrm{P})$ appartient à la droite parallèle à Δ passant par* P *; la seconde traduit l'appartenance du point $u(\mathrm{P})$ au plan Π.*

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; on a alors $(x+5\lambda)+3(y+3\lambda)+5(z+\lambda) = 0$, soit $\lambda = \frac{1}{19}(x+3y+5z)$, et donc
   $$\begin{cases} x' &= \frac{14}{19}x - \frac{15}{19}y - \frac{25}{19}z \\ y' &= -\frac{3}{19}x + \frac{10}{19}y - \frac{15}{19}z \\ z' &= -\frac{1}{19}x - \frac{3}{19}y + \frac{14}{19}z \end{cases}$$
   La matrice de u dans la base canonique est par conséquent
   $$\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 14 & -15 & -25 \\ -3 & 10 & -15 \\ -1 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

2. La restriction de u au plan Π (resp. à la droite Δ) est l'identité (resp. est identiquement nulle). Quelle que soit par conséquent la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ du plan Π, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, e)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*** Exercice 2.**

1. Si un vecteur x de $\mathbb{C}^n$ s'écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$, alors $u(x) = u(x_1) + u(x_2) = x_1 - x_2$ et donc
   $$x_1 = \frac{x+u(x)}{2},\ x_2 = \frac{x-u(x)}{2}.$$
   Réciproquement, comme
   $$\frac{x+u(x)}{2} \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}),\ \frac{x-u(x)}{2} \in \mathrm{Ker}(u+\mathrm{id}) \ \text{ et } x = \frac{x+u(x)}{2} + \frac{x-u(x)}{2}$$
   pour tout vecteur x de $\mathbb{C}^n$, l'espace $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u-id)$ et $\mathrm{Ker}(u+id)$.

2. Si $u \neq \mathrm{id}$ et $u \neq -\mathrm{id}$, les deux sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u+\mathrm{id})$ de $\mathbb{C}^n$ sont de dimensions respectives p et q avec $1 \leq p, q \leq n-1$; comme la restriction de u au premier (resp. au second) est l'identité (resp. l'opposée de l'identité), ces sous-espaces sont stables par u et, si $(e_1, \ldots, e_p)$ (resp. $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est une base du premier (resp. du second),la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est
$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_q \end{pmatrix}.$$

*** Exercice 3.**

1. Calcul immédiat.
2. Le rang de la matrice B, et donc de l'endomorphisme u, est 1 ; on a en outre $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. On a $u\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ donc la matrice de u dans la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*** Exercice 4.**

1. $\mathrm{A} = b\mathrm{J} + (a-b)\mathrm{I}_n$.
2. On démontre facilement par récurrence sur l'entier k que $\mathrm{J}^k = n^{k-1}\mathrm{J}$ pour tout k. Comme les matrices J et I_n commutent,
$$\begin{aligned} \mathrm{A}^k &= (b\mathrm{J} + (a-b)\mathrm{I}_n)^k \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} b^\ell (a-b)^{k-\ell} \mathrm{J}^\ell \mathrm{I}_n \\ &= \sum_{\ell=1}^{k} \binom{k}{\ell} n^{\ell-1} (a-b)^{k-\ell} \mathrm{J} + (a-b)^k \mathrm{I}_n \\ &= \frac{1}{n}\left[\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} (nb)^\ell (a-b)^{k-\ell} - (a-b)^k\right] \mathrm{J} + (a-b)^k \mathrm{I}_n \\ &= \frac{1}{n}\left[(a+(n-1)b)^k - (a-b)^k\right] \mathrm{J} + (a-b)^k \mathrm{I}_n \end{aligned}$$

*** Exercice 5.**

1. Calcul immédiat ; on trouve $\lambda = 1,\ \mu = 4$.
2. Quel que soit l'entier $n \geq 1$, on note respectivement $\ell(n;p,p), \ell(n;p,q), \ell(n;q,p)$, $\ell(n;q,q)$ le nombre de chemins de longueur n entre p et p, p et q, q et p, q et q. En observant qu'un chemin de longueur $n+1$ entre p et p est composé d'un chemin de longueur 1 entre p et p puis d'un chemin de longueur n entre p et p ou bien d'un chemin de longueur 1 entre p et q puis d'un chemin de longueur n entre q et p, on obtient la formule de récurrence
$$\begin{aligned} \ell(n+1;p,p) &= \ell(1;p,p)\ell(n;p,p) + \ell(1;p,q)\ell(n;q,p) \\ &= 2\ell(n;p,p) + \ell(n;q,p). \end{aligned}$$
Un raisonnement analogue conduit aux formules
$$\ell(n+1;p,q) = 2\ell(n;p,q) + \ell(n;q,q),\ \ell(n+1;q,p) = 3\ell(n;q,p) + 2\ell(n;p,p)$$
et
$$\ell(n+1;q,q) = 3\ell(n;q,q) + 2\ell(n;p,q)$$
et on en déduit immédiatement les nombres demandés : il y a
$$\ell(2;p,p) + \ell(2;p,q) + \ell(2;q,p) + \ell(2;q,q) = 32$$

chemins de longueur 2,

$$\ell(3;p,p)+\ell(3;p,q)+\ell(3;q,p)+\ell(3;q,q)=128$$

chemins de longueur 3 et

$$\ell(;p,p)+\ell(4;p,q)+\ell(4;q,p)+\ell(4;q,q)=512$$

chemins de longueur 4.

3. Il est plus facile de calculer directement ces puissances plutôt que d'utiliser D ; l'intérêt de l'écriture $M = P^{-1}DP$ apparaît par contre si l'on veut une formule explicite pour M^n. On obtient

$$M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix},\ M^3 = \begin{pmatrix} 22 & 21 \\ 42 & 43 \end{pmatrix} \text{ et } M^4 = \begin{pmatrix} 86 & 85 \\ 170 & 171 \end{pmatrix}.$$

Il faut observer que, pour $n \in \{2,3,4\}$, le nombre de chemins de longueur n est la somme des coefficients de M^n. Ce fait est bien entendu général : les récurrences du début peuvent en effet s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \ell(n+1;p,p) \\ \ell(n+1;q,p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(1;p,p) & \ell(1;p,q) \\ \ell(1;q,p) & \ell(1;q,q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell(n;p,p) \\ \ell(n;q,p) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \ell(n+1;p,q) \\ \ell(n+1;q,q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(1;p,p) & \ell(1;p,q) \\ \ell(1;q,p) & \ell(1;q,q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell(n;p,q) \\ \ell(n;q,q) \end{pmatrix},$$

soit encore

$$\begin{pmatrix} \ell(n+1;p,p) & \ell(n+1;p,q) \\ \ell(n+1;q,p) & \ell(n+1;q,q) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \ell(n;p,p) & \ell(n;p,q) \\ \ell(n;q,p) & \ell(n;q,q) \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{pmatrix} \ell(n;p,p) & \ell(n;p,q) \\ \ell(n;q,p) & \ell(n;q,q) \end{pmatrix} = M^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on constate que le nombre de chemins de longueur n dans le graphe est la somme des coefficients de la matrice M^n.

4. Le raisonnement est le même qu'avec le premier graphe. La matrice d'incidence du second graphe est

$$M = \begin{pmatrix} \ell(1;p,p) & \ell(1;p,q) \\ \ell(1;q,p) & \ell(1;q,q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est diagonalisable sous la forme

$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} n+1 & 0 \\ 0 & 1-n \end{pmatrix} P$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}P$, ce qui permet de calculer explicitement la puissance k-ème de M :

$$M^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+n)^k + (1-n)^k & (1+n)^k - (1-n)^k \\ (1+n)^k - (1-n)^k & (1+n)^k + (1-n)^k \end{pmatrix}$$

et donc d'obtenir le nombre de chemins de longueur k :

$$\frac{1}{2}\left(2[(1+n)^k + (1-n)^k] + 2[(1+n)^k - (1-n)^k]\right) = 2(n+1)^k.$$