Université Claude Bernard Lyon 1
Master 1 Recherche

Groupes classiques et géométrie

Correction partielle de l'examen de mai 2014

Problème 2 (Simplicité du groupe $\mathrm{SO}(2n+1)$)

A. *Préliminaires*

1. Le spectre $\mathrm{Sp}(h)$ de h est stable par conjugaison complexe car il s'agit de l'ensemble des racines du polynôme caractéristique χ_h de h, qui est à coefficients réels.

Le spectre de h est formé de nombres complexes de module 1, donc les valeurs propres réelles possibles sont 1 et -1. Soit m_+ (resp. m_-) la multiplicité de 1 (resp. -1) dans χ_h. Notons par ailleurs $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_r, \overline{\lambda_r}$ les racines complexes non réelles de χ_h, répétées avec leur multiplicité. On a donc

$$m_+ + m_- + 2r = \deg(\chi_h) = 2n+1$$

et la condition $\det(h) = 1$ se réécrit

$$1 = (-1)^{m_-} \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{\lambda_i} = (-1)^{m} \prod_{i=1}^{r} |\lambda_i|^2 = (-1)^{m_-}.$$

On déduit de la seconde égalité que m_- est pair, puis de la première que m_+ est impair. Ceci implique en particulier $m_+ \geqslant 1$, donc 1 est valeur propre de h.

2. Écrivons $\mathrm{I} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ et $\{1, \ldots, 2n+1\} \setminus \mathrm{I} = \{i_{k+1}, \ldots, i_{2n+1}\}$. Puisque $(f_1, \ldots, f_{2n+1})$ et $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{2n+1}})$ sont deux bases orthonormées de $\mathbf{R}^{2n+1}$, il existe un unique automorphisme orthogonal $\rho \in \mathrm{O}(2n+1)$ tel que $\rho(f_m) = e_{i_m}$ pour tout $m \in \{1, \ldots, 2n+1\}$. Par construction, ρ envoie $(f_1, \ldots, f_k)$ sur $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

On peut en outre choisir ρ dans $\mathrm{SO}(2n+1)$: en effet, si $\det(\rho) < 0$, alors l'endomorphisme ρ' défini par $\rho'(f_m) = e_{i_m} = \rho(f_m)$ pour $m \in \{1, \ldots, 2n\}$ et $\rho'(f_{2n+1}) = -e_{i_{2n+1}} = -\rho(f_{2n+1})$ est un automorphisme orthogonal tel que $\det(\rho') = -\det(\rho) > 0$ et qui envoie bien $(f_1, \ldots, f_k)$ sur $(e_i)_{i \in I}$ puisque $k < 2n+1$.

B. *Différentielles*

Afin d'alléger les notations, on pose $e = \mathrm{I}_{2n+1}$.

1. L'application

$$\pi : \mathrm{M}_{2n+1}(\mathbf{R}) \to \mathrm{S}_{2n+1}(\mathbf{R}), \quad \mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}\mathrm{A}$$

est différentiable et sa différentielle au point e est l'application linéaire

$$d_e\pi : \mathrm{M}_{2n+1}(\mathbf{R}) \to \mathrm{S}_{2n+1}(\mathbf{R}), \quad \mathrm{M} \mapsto {}^t\mathrm{M} + \mathrm{M}.$$

Cette dernière est surjective, donc $O(2n+1) = \pi^{-1}(e)$ est une sous-variété au voisinage de e et son espace tangent en ce point est le sous-espace vectoriel $\ker d_e\pi \subset \mathrm{M}_{2n+1}(\mathbf{R})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(2n+1)$ de $\mathrm{O}(2n+1)$ est donc l'espace des matrices antisymétriques de taille $2n+1$.

L'application $\det : \mathrm{O}(2n+1) \to \mathbf{R}$ étant continue et à valeurs dans $\{\pm 1\}$, le sous-groupe

$$\mathrm{SO}(2n+1) = \det{}^{-1}(1) = \det{}^{-1}(\mathbf{R} \setminus \{-1\})$$

est une partie ouverte (et fermée) de $\mathrm{O}(2n+1)$. Il s'agit donc d'une sous-variété de $\mathrm{O}(2n+1)$ ayant le même espace tangent au point e, ce qui prouve que l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2n+1)$ de $\mathrm{SO}(2n+1)$ est l'espace des matrices antisymétriques de taille $2n+1$.

2. On a $h_{\mathrm{I}}^{-1} \in \mathrm{H}$ et $gh_{\mathrm{I}}g^{-1} \in \mathrm{H}$ pour tout $g \in \mathrm{SO}(2n+1)$ car H est un sous-groupe distingué de $\mathrm{SO}(2n+1)$, donc $\phi_{\mathrm{I}}(g) = (gh_{\mathrm{I}}g^{-1})h_{\mathrm{I}}^{-1} \in \mathrm{H}$. L'application ϕ_{I} est différentiable car l'inversion et le produit sont des applications différentiables, et la composée d'un nombre fini d'applications différentiables est différentiable.

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{so}(2n+1)$,

$$\begin{aligned}
\phi_I(e+\varepsilon A) &= (e+\varepsilon A)h_I(e+\varepsilon A)^{-1}h_I^{-1} \\
&= (e+\varepsilon A)h_I(e-\varepsilon A)h_I^{-1} + o(\varepsilon) \\
&= e + \varepsilon(A - h_I A h_I^{-1}) + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

donc la différentielle de ϕ_I en l'identité est l'application linéaire

$$\mathfrak{so}(2n+1) \to \mathfrak{so}(2n+1), \quad A \mapsto A - h_I A h_I^{-1}.$$

3. L'application ϕ est différentiable car produit d'un nombre fini d'applications différentiables. Pour toute matrice $A \in \mathfrak{so}(2n+1)$,

$$\begin{aligned}
\phi(e+\varepsilon A) &= \prod_I \phi_I(e+\varepsilon A) \\
&= \prod_I (e + \varepsilon d_e\phi_I(A)) + o(\varepsilon) \\
&= \prod_I (e + \varepsilon(A - h_I A h_I^{-1})) + o(\varepsilon) \\
&= e + \varepsilon \sum_I (A - h_I A h_I^{-1}) + o(\varepsilon) \\
&= e + \varepsilon \left(\binom{2n+1}{k} A - \sum_I h_I A h_I^{-1} \right) + o(\varepsilon)
\end{aligned}$$

donc $d_e\phi(A) = \binom{2n+1}{k} A - \sum_I h_I A h_I^{-1}$.

C. *Noyau de la différentielle*

1. Si l'on écrit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n+1}$, alors $q(M) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}^2$ et donc q est une forme quadratique définie positive sur $M_{2n+1}(\mathbf{R})$.

2. Comme h_I est orthogonal,

$${}^t(h_I A h_I^{-1})(h_I A h_I^{-1}) = {}^t h_I^{-1} {}^t A {}^t h_I h_I A h_I^{-1} = h_I ({}^t A A) h_I^{-1}$$

et donc

$$q(h_I A h_I^{-1}) = \det(h_I({}^t A A) h_I^{-1}) = \det({}^t A A) = q(A).$$

La condition $A \in \ker d_e\phi$ équivaut à $A = \frac{1}{K}\sum_I h_I A h_I^{-1}$ avec $K = \binom{2n+1}{k}$, donc

$$\frac{1}{K}\sum_I q(h_I A h_I^{-1}) = \frac{1}{K}\sum_I q(A) = q(A) = q\left(\frac{1}{K}\sum_I h_I A h_I^{-1}\right).$$

3. Si l'on désigne par φ_q la forme polaire de q, alors $2\varphi_q(A, B) = -q(A-B) + q(A) + q(B)$ et donc

$$\begin{aligned}
q(A_1 + \ldots + A_m) &= \sum_{i=1}^m q(A_i) + 2\sum_{i<j} \varphi_q(A_i, A_j) \\
&= \sum_{i=1}^m q(A_i) - \sum_{i<j} (q(A_i - A_j) - q(A_i) - q(A_j)) \\
&= -\sum_{i<j} q(A_j - A_i) + m \sum_{i=1}^m q(A_i)
\end{aligned}$$

car, dans la somme du membre de droite de l'avant-dernière égalité, chaque $q(A_k)$ apparaît $m-1$ fois : $n-k+1$ fois avec les couples (k,j) tels que $j > k$ et $k-1$ fois avec les couples (i,k) tels que $i < k$.

Munissons l'ensemble des parties à k éléments de $\{1,\ldots,2n+1\}$ d'un ordre total. En utilisant l'identité de la question 2 et en appliquant la formule précédentes aux matrices $\mathrm{B_I} = h_\mathrm{I}\mathrm{A}h_\mathrm{I}^{-1} - \mathrm{A}$, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathrm{I}<\mathrm{J}} q(h_\mathrm{I}\mathrm{A}h_\mathrm{I}^{-1} - h_\mathrm{J}\mathrm{A}h_\mathrm{J}^{-1}) &= \mathrm{K}\sum_\mathrm{I} q(h_\mathrm{I}\mathrm{A}h_\mathrm{I}) - q(\sum_\mathrm{I} h_\mathrm{I}\mathrm{A}h_\mathrm{I}^{-1}) \\
&= \mathrm{K}^2 q(\frac{1}{\mathrm{K}}\sum_\mathrm{I} h_\mathrm{I}\mathrm{A}h_\mathrm{I}^{-1}) - q(\sum_\mathrm{I} h_\mathrm{I}\mathrm{A}h_\mathrm{I}^{-1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque q est définie positive, la nullité de cette somme équivaut aux identités $h_\mathrm{I}\mathrm{A}h_\mathrm{I}^{-1} = h_\mathrm{J}\mathrm{A}h_\mathrm{J}^{-1}$ pour toutes parties $\mathrm{I} \neq \mathrm{J}$. Finalement, comme A appartient au noyau de $d_e\varphi$,

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\mathrm{K}}\sum_\mathrm{J} h_\mathrm{J}\mathrm{A}h_\mathrm{J}^{-1} = h_\mathrm{I}\mathrm{A}h_\mathrm{I}^{-1}$$

pour toute partie I de $\{1,\ldots,2n+1\}$ à k éléments.

4. La matrice A commutant avec h_I, elle stabilise le sous-espace propre

$$\ker(h_\mathrm{I} - e) = \ker(\rho_\mathrm{I} h \rho_\mathrm{I}^{-1} - e) = \rho_\mathrm{I}(\mathrm{E}_1).$$

Par construction (question A.2), $\rho_\mathrm{I}(\mathrm{E}_1) = \mathrm{Vect}(e_i \ ; \ i \in \mathrm{I})$. Si l'on fixe un indice $i \in \{1,\ldots,2n+1\}$, alors

$$\mathbf{R}e_i = \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{Vect}(e_j \ ; \ j \in \mathrm{I}),$$

où I parcourt l'ensemble des parties à k éléments de $\{1,\ldots,2n+1\}$ contenant i. La droite $\mathbf{R}e_i$ est donc stable sous A, puisque intersection de sous-espaces stables sous A.

5. D'après la conclusion de la question précédente, la matrice A est diagonale. Comme elle est également antisymétrique en vertu de la question B.1, c'est la matrice nulle : $\mathrm{A} = 0$.

D. *Conclusion*

1. Nous venons de démontrer que la différentielle de ϕ au point e est injective, et donc surjective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme linéaire de $\mathfrak{so}(2n+1)$. Il resulte alors du théorème d'inversion locale qu'il existe des voisinages U et V de e dans $\mathrm{SO}(2n+1)$ tels que φ induise un difféomorphisme de U sur V. Comme ϕ est à valeurs dans H (question B.2), on en déduit que le sous-groupe H contient V ; c'est donc une partie ouverte de $\mathrm{SO}(2n+1)$ en vertu du principe de translation.

2. Le sous-groupe H est ouvert, donc également fermé puisque tout sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est automatiquement fermé. On en déduit l'égalité $\mathrm{H} = \mathrm{SO}(2n+1)$ car le groupe $\mathrm{SO}(2n+1)$ est connexe, et ceci achève la démonstration de la simplicité de $\mathrm{SO}(2n+1)$.