Yongwe

Jean-Luc

Travail d'Initiative Personnel Encadré :

Chaines de Markov et protocole de gestion des communications radios par satellite relais.

(Système ALOHA)

(Sous la tutelle de Madame Anne Perrut)

Semestre d'Automne 2011

Table des matières

I. Introduction

Avant de commencer à expliquer ce que sont les chaines de Markov, nous allons introduire des outils tels que la loi binomiale et la loi de Poisson, mais aussi des notions telles que probabilité conditionnelle, loi géométrique et la formule des probabilités totales seront introduites pour une meilleure compréhension ; et nous donnerons en fin du document un exemple d'application des chaines de Markov avec le système ALOHA.

La loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience où la réussite et l'échec sont les seules issues possibles.

Considérons une expérience aléatoire (c'est-à-dire une expérience dont on ne peut prévoir le résultat) à deux issues possibles ; notons p la probabilité de réussite et q la probabilité d'échec.

Répétons n fois cette épreuve de Bernoulli où les n réalisations sont indépendants les unes des autres.

Posons X une variable aléatoire comme étant égale au nombre de succès ; on dira alors que X suit la loi binomiale de paramètres n et p

1. Définition

Soit $n \in N,\ p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p , noté $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque :

-$\forall k \in \{0,..n\}$,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \times q^{n-k}$$

Où

$$q = 1-p$$

<u>Exemple de calcul utilisant la loi binomiale (simulation sous R)</u>

Considérons un texte contenant 20000 mots et dans lequel chaque mot à une probabilité de 1/10000 d'être mal écrit.

Selon la loi binomiale, on aura alors une probabilité de trouver 2 mots comportant des fautes dans ce texte qui s'élèvera à :

> dbinom (2, 20000,1/10000)

[1] 0.2706841

Loi de Poisson

La loi de Poisson s'utilise lorsqu'on étudie un phénomène rare dans des conditions spécifiques.

Par exemple le nombre de fautes de frappes d'un cours de mathématiques (évènement extrêmement rare)

1. Définitions et propriétés

Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et on note $X \sim P(\lambda)$ lorsque :

$$\forall k \in \{0, .. n\},$$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$$

En fait la loi de Poisson est un cas limite de la loi binomiale lorsque $n \to \infty$

$on\ a\ donc \quad P(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \binom{k}{n} p^k \times q^{n-k}$

Où $\lambda = n \times p.$

(D'où l'équivalence entre la loi binomiale et la loi de Poisson pour des nombres très grand)

<u>Exemple de calcul utilisant la loi de Poisson (simulation sous R)</u>

En considérant le même exemple que plus haut mais cette fois le calcul étant fait selon la loi de Poisson on obtient :

> dpois(2,2)

[1] 0.2706706

Il est visible que dpois(2,2) ~dbinom(2,20000,1/10000)

Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité et B un événement de probabilité $P(B)$ strictement positif. La probabilité conditionnelle de A sachant B(ou par rapport à B) est définie conditionnellement par la formule :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P\ (A|B) =$ « Probabilité de $A\ si\ B$ » ou (« probabilité de $A\ si\ B$ est réalisé»).

On appellera probabilité conditionnelle l'application $A \mapsto P\ (A|B)$.

$-si\ A \cap B = \emptyset\ alors\ \ P\ (A|B)$=**0**

-$si\ B \subsetneq A\ alors\ P\ (A|B) = 1.$

C'est là une notion très intéressante lors de l'étude de phénomènes se déroulant dans le temps et faisant intervenir le hasard à chaque étape.

Loi géométrique

Etant donnée une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de réussite est p et d'échec q et qu'on renouvelle jusqu'à la première réussite, nous noterons X la variable aléatoire donnant le rang de cette réussite.

Les valeurs de X sont les entiers 1, 2,3…. La probabilité que $X = k$ est alors pour $k = 1, 2,3 \dots$

$$P(X = k) = q^{k-1} \times p.$$

Formule de probabilités totales ou formule de Bayes

Soit $\{G_1 \dots G_n\}$ une partition de $\boldsymbol{\Omega}$

$(G_i \neq \emptyset, G_i \neq G_j = \emptyset \; si \; i \neq j \; et \; \bigcup_{1 \le i \le n} G_i \; = \boldsymbol{\Omega})$ en événements

tels que

$$P(G_i) > 0, \qquad \forall i \epsilon \; [\![1, n]\!].$$

Alors pour tout événement G :

$$P(G) = \sum_{i=1}^{n} P(G|G_i) \; \times P(G_i)$$

Si on se ramène à un exemple concret cela donne :

Soit un panier de 3 boules rouges et 4 boules vertes.

Nommons A l'événement « je pioche une boule rouge » et B « je repioche une boule rouge » sans remise de la précédente, alors l'événement de piocher une boule rouge au bout des deux tirages devient :

$$P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$$

$= P\;(B|A). P\;(A) \; + P\;(B|\bar{A}). P\;(\bar{A})$

(Où $\bar{A}$ est la probabilité de l'événement « tiré une boule non rouge » autrement dit une boule verte)

$P(A) = \frac{3}{7}, P(B \cap A) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}, P(B \cap \; \bar{A}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7},$

Donc $P\;(B|A). P\;(A) + P\;(B|\bar{A}). P\;(\bar{A}) \; = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

La probabilité de « j'ai tiré une boule rouge au bout des deux tirages » est de $\frac{3}{7}$

II. Chaine de Markov

De façon intuitive, une chaine de Markov se définit classiquement comme étant une suite de variables pour laquelle la meilleure prédiction que l'on puisse faire à l'étape $n+1$ est la même lorsque l'on se limite à la connaissance de la valeur à l'étape n que si l'on connaissait toutes les valeurs aux étapes précédentes.

1. Définition

Soit E un ensemble fini d'entiers naturels, et $\mathcal{P}(E)$.

$$E = \{1, \dots n\}$$

Une chaine de Markov homogène (mécanisme de transition invariant au cours du temps) à valeurs dans E est une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, P) à valeurs dans E et qui a la propriété suivante :

Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de variables aléatoires ; quel que soit n,

$P(X_{n+1} | (X_0, .. X_n)) = P(X_{n+1} | X_n) = P(X_1 | X_0)$.

Autrement dit pour tout entier n et pour tout (n+2)-uplet $(x_0, \dots x_{n+1})$ de points de E.

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0 \dots X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) = P(X_1 = x_{n+1} | X_0 = x_n).$$

Il est remarquable de voir que les nombres $P(x_1|x_0) = P(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)$ sont représentables par une matrice carrée, appelé «matrice de transition »de la chaine.

De fait l'étude d'une chaine de Markov se ramène alors parfois à un problème d'algèbre linéaire.

2. Graphe d'une chaine de Markov

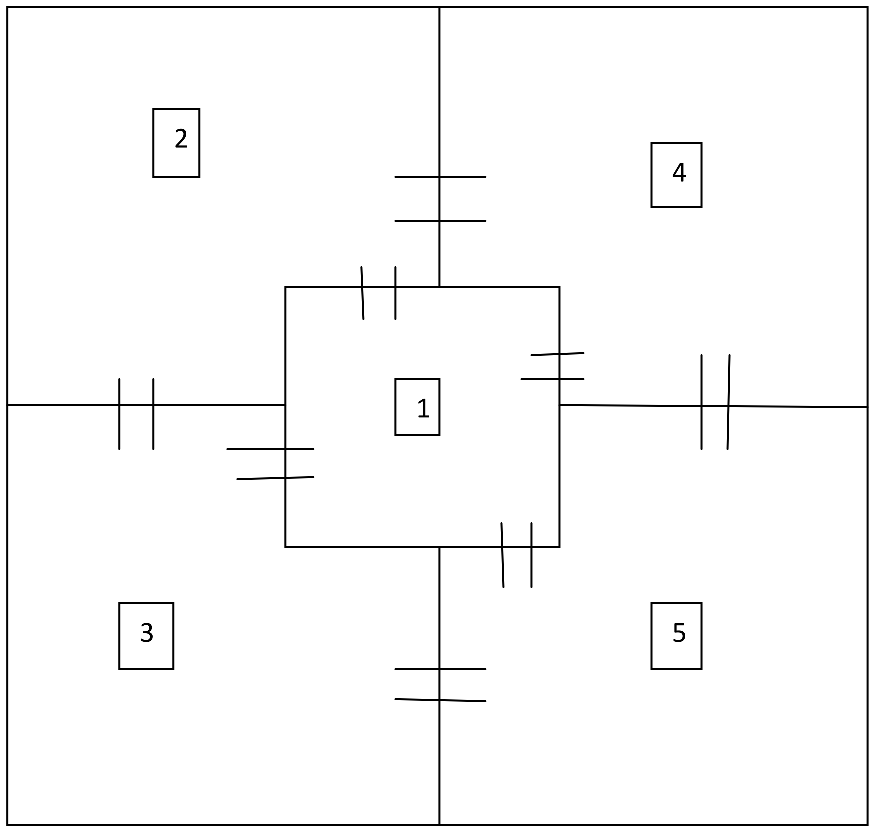
La matrice de transition P d'une de Markov peut être représentée par un graphe orienté (i.e. les arcs entre les sommets ont un sens) dont les sommets sont les états de la chaine.

Les arcs relient les sommets associés aux états i et j si la probabilité de transition de i à j est positive c'est-à-dire $p_{ij} > 0$.

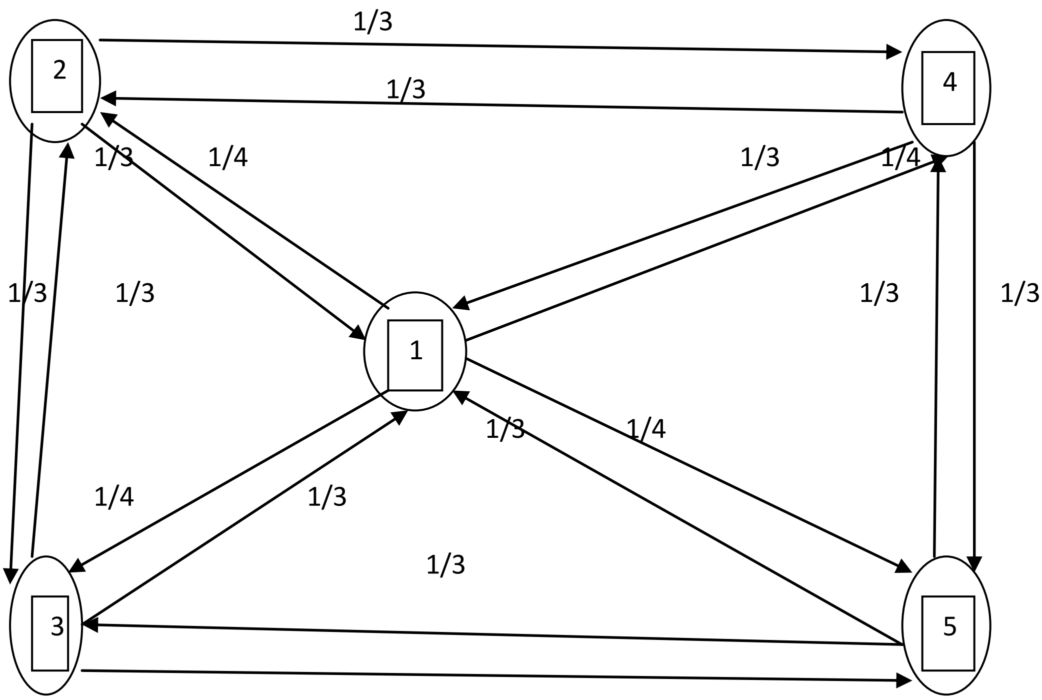
Le graphe est appelé « graphe représentatif » ou « graphe de transition », de la chaine de Markov.

Exemple : Quelqu’un qui visite un musée en partant de la pièce centrale, en se déplaçant au hasard.

(Schématisation de la situation)



(Graphe représentatif)



La matrice de transition se transcrit alors : (utilisation du Logiciel R)

```
> vec1=c(0,1/4,1/4,1/4,1/4)

> vec2=c(1/3,0,1/3,1/3,0)

> vec3=c(1/3,1/3,0,0,1/3)

> vec4=c(1/3,1/3,0,0,1/3)

> vec5=c(1/3,0,1/3,1/3,0)

> a=matrix(c(vec1,vec2,vec3,vec4,vec5),nrow=5,byrow=T)

> a

      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]

[1,]  0.0000000 0.2500000 0.2500000 0.2500000 0.2500000

[2,]  0.3333333 0.0000000 0.3333333 0.3333333 0.0000000

[3,]  0.3333333 0.3333333 0.0000000 0.0000000 0.3333333

[4,]  0.3333333 0.3333333 0.0000000 0.0000000 0.3333333

[5,]  0.3333333 0.0000000 0.3333333 0.3333333 0.0000000
```

On appelle **matrice Markovienne** une matrice carrée dont chaque élément est un réel compris entre 0 et 1 et dont la somme des éléments de chaque ligne vaut 1.

3. Probabilité de transition et matrices de transition

Pour une chaine de Markov homogène.

Soit S un ensemble fini S d'entiers naturels

$S = \{0, \dots N\}$ et $\{X_n, n = 0,1, \dots N\}$ $on\ a$

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) \quad pour\ i, j \epsilon S$$

(où S est un espace d'états).

Traduction : la probabilité p_{ij} dans la matrice de transition P, est égale à la probabilité conditionnelle que le système se retrouve dans l'état j à l'étape suivante sachant qu'il se trouve actuellement dans l'état i.

Si la chaine possède $|S|$ états, les probabilités précédentes peuvent être rangées dans une matrice de transition $P = (p_{ij})$ de taille $(N + 1) \times (N + 1)$ dont les lignes et colonnes sont indexés par les éléments de S.

Propriété :

Soit P une matrice markovienne de taille $n \in N$, alors toute puissance $P^m \; avec \; m \in N$, de P est une matrice Markovienne.

Preuve :

Le résultat est vrai pour $m = 0$,

On a P^0=I_n , $I_n := \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$

et $m = 1$. Pour $m \geq 1$ $(P^m)_{ij} \geq 0$ pour tout i, j et

Pour tout i

$$\sum_j (P^m)_{ij} = \sum_j (\sum_k (P^{m-1})_{ik} \times P_{kj}) = \sum [(P^{m-1})_{ik} \times P_{kj}] = 1$$

4. Classification des états

4.1. Classification et réduction des graphes.

Soit P une matrice de transition d'une chaine de Markov et G le graphe représentatif de P. L'état j est accessible depuis i s'il existe un chemin de i à j.

Propriété :

L'état j est accessible de l'état i si et seulement si il existe $n \geq 0 \; tel \; que \; P_{ij}^n > 0$.

Les états i et j communiquent s'ils sont accessibles l'un à partir de l'autre.

Propriété :

Les états i et j communiquent (c'est-à –dire qu'il est possible de passer de l'état i à l'état j) si et seulement si il existe $n \geq 0$ et $m \geq 0$ tels que $P_{ij}^n > 0$ et $P_{ij}^m > 0$.

La relation communiquer **(↔)** est une relation d'équivalence.

$\{i \leftrightarrow j\} \Leftrightarrow \{j \leftarrow i \; et \; i \leftarrow j\}$

La relation $i \; et \; j$ communiquent est une relation d'équivalence dont les classes correspondent aux composantes fortement connexes de G. Les états $i \; et \; j$ communiquent si et seulement s'ils appartiennent à la même composante fortement connexe.

On appelle « classes de la chaine » les classes d'équivalence induites par la relation **(↔)** sur l'espace de probabilités.

4.2. Classes

-Une classe est récurrente si elle correspond à un sommet sans successeur dans le graphe des composantes connexes. Les états d'une classe récurrente sont récurrents.

-Les états d'une classe transitoire sont transitoires.

-Une classe récurrente composée d'un seul état est absorbante.

Propriété :

L'état i est dit absorbant si et seulement $si \; p_{ii} = 1 \; (on \; a \; alors \; p_{ij} = 0 \; si \; i \neq j)$ .Une chaine de Markov est dite irréductible si elle ne compte qu'une seule classe, elle est dite réductible dans le cas contraire.

Propriété :

-Une chaine de Markov est irréductible si et seulement si son graphe représentatif est fortement connexe : tous ses états communiquent.

4.3. Période

La période d de l'état i d'une chaine de Markov est égale au plus grand commun diviseur de tous les n pour lesquels $p_{ij}^{n} > 0$.
L'état i est périodique lorsque $d > 1$ et apériodique lorsque $d = 1$.

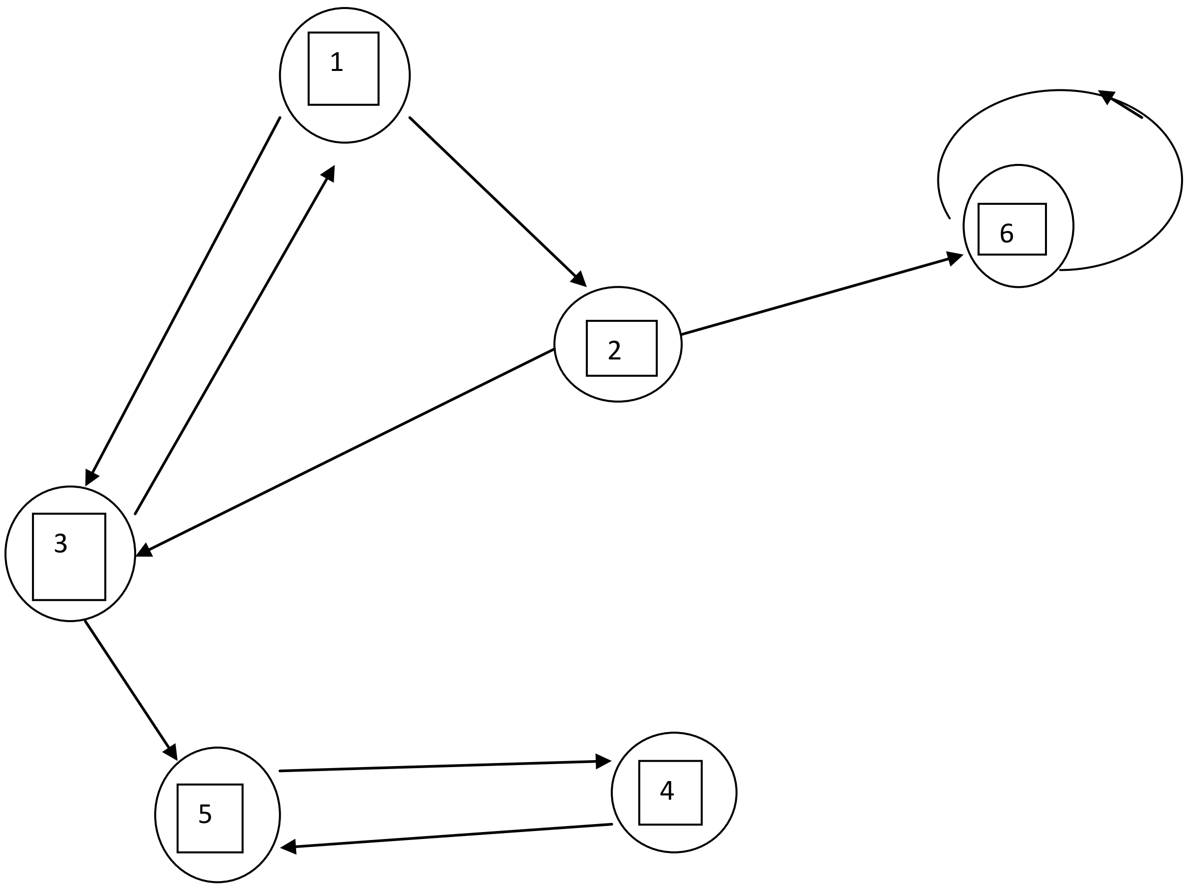
Propriété :

Si p_{ii}>0 alors l'état i est apériodique.

On peut aussi donc voir que tout état d'une classe a la même période que les autres. La période étant une propriété de classe on parlera de classes périodiques (resp. apériodiques) et de chaines de Markov irréductibles périodiques (resp. apériodiques)

Pour illustrer notre propos, voici un exemple :

Considérons le graphe ci-dessous



Il apparait très clairement que les classes de communication sont :

{1, 2,3} classe transitoire

{4,5} classe récurrente

{6} classe récurrente

Déterminons donc sa période ; pour l'état transitoire {1,2,3}, pour aller de 1 à 1 on a le chemin 1->2->3->1, qui est de longueur 3 le chemin 1->3->1 qui est de longueur 2 ,etc.…

Ces deux seuls chemins suffisent pour trouver la période de l'état 1

$$d(1) = pgcd(2,3) = 1$$

Pareil pour 2,3et 6 (où le chemin de 6 à 6 est de longueur 1 constamment).

Vérifions cela pour les états 4 et 5 chemin 4->5->4 et 5->4->5 donc

$$pgcd(2,2) = 2 = d(4) = d(5)$$

Les états 4 et 5 sont de période 2.

Ainsi la classe transitoire {1, 2,3} et la classe récurrente {6} sont apériodiques tandis que la classe récurrente {4,5} est périodique.

5. Distribution initiale et comportement transitoire.

5.1. Distribution initiale

La distribution des états d'une chaine de Markov après n transitions est notée Π^n. Cette distribution est un vecteur de probabilités contenant la loi de la variable X_n,

$\Pi_i^n = P(X_n = i) \qquad \forall i \epsilon S.$

La distribution initiale est Π^0.

Si l'état initiale est connu avec certitude et est égal à i, on a simplement $\Pi_i^0 = 1$ et Π_i^0=0

$pour\ tout\ j \neq i.$

5.2. Comportement transitoire

Soit P la matrice de transition d'une chaine de Markov et Π^0 la distribution de son état initial.

$Pour\ tout\ n \geq 1, on\ a$

$$\Pi^n = \Pi^{n-1} \times P \quad \text{et} \quad \Pi^n = \Pi^0 \times P^n$$

Par récurrence.

Preuve :

On a pour tout $j \epsilon S$,

$$\Pi_j^1 = P(X_1 = j) = \sum_{j \in S} P(X_1 = j | X_0 = i)\, P(X_0 = i) = \sum_{j \in S} \Pi_i^0 \times p_{ij} = \sum_{j \in S} p_{ij} \times \Pi^0$$

$et\ \Pi^1 = \Pi^0 \times P.$

La chaine étant homogène, on obtient immédiatement le premier résultat

$$\Pi^n = \Pi^{n-1} P$$

$$pour\ tout\ n \geq 1$$

Pour démontrer le second résultat il suffit de résoudre l'équation de récurrence précédente par substitution.

6. Comportement asymptotique des chaines irréductibles

Objectifs et comportement asymptotique

L'étude du comportement à long terme d'une chaine de Markov cherche à répondre à des questions aussi diverses que

-la distribution Π^n converge-t-elle, lorsque $n \to \infty$?

-si la distribution Π^n converge lorsque $n \to \infty$, quelle est la limite Π^*et cette limite est-elle indépendante de la distribution initiale Π^0 ?

-si l'état i est persistant, quel est la proportion du temps passé dans cet état et quel est le nombre moyen de transitions entre deux visites successives de cet état?

-si l'état i est transitoire, quel est le nombre moyen de visites de cet état ?

7. Distribution invariante

Une distribution Π est dite invariante ou stationnaire si $\Pi = \Pi P$**.**

Propriété : Une chaine de Markov possède toujours au moins une distribution invariante.

Une chaine de Markov possède autant de distributions invariantes linéairement indépendantes que la multiplicité de la valeur propre **1** de sa matrice de transition.

La distribution Π^n des états d'une chaine de Markov converge vers une distribution (invariante) Π^* indépendante de la distribution initiale Π^0 si et seulement si la suite des puissances de la matrice de transition P de la chaine converge vers une matrice (stochastique) P^* dont toutes les lignes sont égales entre elles. De plus, si tel est le cas, chaque ligne de P^* est égale à Π^*

Preuve :

La condition est nécessaire car si, indépendamment de Π^0,

$$\lim_{n \to \infty} \Pi^n = \Pi^*$$

Il suffit de considérer successivement les distributions initiales

$\Pi_i^n = (1,0 \dots 0) = (0 \dots 0,1)$

Pour obtenir

Π*= $\lim_{n \to \infty} \Pi^n$= $\lim_{n \to \infty} \Pi_i P^n$= $\lim_{n \to \infty} (P^n)_i$=$(P^*)_{\ i}$.

Ainsi P^* existe et toutes ses lignes sont égales à Π^***,** la condition est suffisante.

Si P^* existe et si p_{ij}^* =p_j^* $\quad pour\ tout\ i\epsilon S, on\ a$

$\lim_{n\to\infty} \Pi^n$= $\lim_{n\to\infty} \Pi^0 P^n = \Pi^0 \lim_{n\to\infty} P^n$= $\Pi^0 P^*$

Et la limite de Π^* existe.

De plus

$\Pi_j^* = \sum_{i\in S}(\Pi^0)_i \times p_{ij}^* = \sum_{i\in S}(\Pi^0)_i \times p_j^* = p_j^* \times \sum_{j\in S} \Pi_i^* = p_j^*$

et Π^* est indépendante de Π^n et identique à n'importe quelle ligne de P^*.

Dans le cas où

Π^*= $\lim_{n\to\infty} \Pi^n$,

On parlera de distribution asymptotique invariante.

8. Comportement asymptotique des chaines irréductibles et apériodiques

Soit P la matrice de transition d'une chaine irréductible et apériodique. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

-La matrice $P^{\,n}$ tend vers une matrice stochastique P^* lorsque n tend vers l'infini.

-Les lignes de P^* sont toutes égales entre elles.

-${p_{ij}}^*$ >0 pour tout $i, j\epsilon S$.

-Pour toute distribution initiale Π^0, $\lim_{n\to\infty} \Pi^n = \lim\limits_{n\to\infty} \Pi^0 P^n = \Pi^*$

- Π^* est la solution unique du système.

$$\begin{cases} \Pi P = \Pi \\ \\ \Pi 1 = 1 \end{cases}$$

- Π^* est égal à n'importe quelle ligne de la matrice P^*

-$Pour\ tout\ i\epsilon S$, Π_i^* =$\frac{1}{Ч_i}$

Où $Ч_i$ est l'espérance du nombre de transitions entre deux visistes successives de l'état i. Pour n suffisamment grand, on a $\Pi^n \approx \Pi^*$ et Π_i^* est la probabilité que la chaine se trouve dans l'état i.

III. Applications des chaines de Markov

Modélisation du système ALOHA

1. Présentation

Pour des raisons économiques et de complexité des réseaux, on dut trouver une alternative aux réseaux à câbles reliant des ordinateurs à un nombre croissant de terminaux se trouvant à des distances de plus en plus en grandes, dans les années 70.

Cette alternative fut trouvée dans **les communications radios via un satellite relais**.

Là encore un autre problème se présente :

L'optimisation de l'utilisation d'un même canal par plusieurs utilisateurs distincts dont la transmission des données se fait par « paquets d'informations » de longueurs fixées ; ce qui peut occasionner des interférences nuisibles lorsque des utilisateurs envoient des paquets d'informations simultanément.

C'est en se basant sur l'accès aléatoire des paquets non transmis pour cause de conflits que l'on étudie le système ALOHA pour un grand nombre de terminaux (ex : consoles).

2. Fonctionnement du système ALOHA discrétisé

En supposant tous les paquets de taille constante, on peut découper le temps de référence (temps canal) par tranches égales à la durée d'un paquet dans le canal de 10^{-6} secondes.

Les transmissions ne sont permises qu'au début d'une tranche.

Chaque fois que 2 paquets ou plus sont émis simultanément, ils interférent et sont perdus.

Ils doivent donc être réémis de façon aléatoire, et il faut limiter les débordements de buffer (espaces mémoires-tampons où sont stockés provisoirement les paquets)

3. Modèle mathématique : ALOHA non stabilisé

Soient M le nombre d'usagers non dépendants à un instant t (supposé entier par discrétisation),

tout usager a deux états possibles :

-**Actif :** Emission d'un paquet avec une loi de Bernoulli de paramètre σ (σ : taux d'émission). Le paquet est directement envoyé.

-**Bloqué :** A déjà émis et le paquet a été bloqué, réémission à chaque instant suivant une loi de Bernoulli de paramètre p (constant), p caractérise la politique de réémission (tirage aléatoire de régulation).

Le déblocage se fait un par un du fait que le canal ne transporte qu'un seul message à la fois.

Soit $N(t)$ le nombre de terminaux bloqués à l'instant t. Le processus caractérisant l'état du système est une chaine de Markov et selon les différents cas possibles on obtient les probabilités suivantes :

Pour la matrice de transition l'élément p_{ij} sera donc de façon générale :

p_{ij} =$P(\ N(t+1) = j | N(t) = i) \quad (0 \leq i \leq M)$

« Probabilité que j terminaux soient bloqués si i terminaux le sont déjà »

Différents cas :

« La probabilité de voir 2 terminaux ou plus bloqués en moins est nulle car le déblocage se fait un par un. »

p_{ij}=0 $\qquad\qquad\qquad j \leq i-2$

« Parmi les i terminaux bloqués 1 seul réémet. »

$\mathcal{B}(1,p) = \binom{i}{1} \times p^1 \times (1-p)^{i-1} = \frac{i \times (i-1)!}{1! \times (i-1)!} \times p \times (1-p)^{i-1} = i \times p \times (1-p)^{i-1}$

« Parmi les $M-i$ terminaux non bloqués aucun n'émet »

$\mathcal{B}(0,\sigma) = \binom{M-i}{0} \times \sigma^0 \times (1-\sigma)^{M-i} = \frac{(M-i)!}{0! \times (M-i-0)!} \times 1 \times (1-\sigma)^{M-i} = (1-\sigma)^{M-i}$

« La probabilité qu'il y ait un terminal bloqué en moins si aucun des terminaux non bloqués n'a émis. »

$p_{ij} = \ i \times p \times (1-p)^{i-1} \times (1-\sigma)^{M-i} \qquad j = i-1$

« Parmi les i terminaux bloqués aucun ne réémet »

$\mathcal{B}(0,p) = \binom{i}{0} \times p^0 \times (1-p)^i = \frac{i!}{0! \times (i-0)!} \times 1 \times (1-p)^i = (1-p)^i$

« Parmi les $M-i$ terminaux non bloqués 1 seul émet »

$\mathcal{B}(1,\sigma) = \binom{M-i}{1} \times \sigma^1 \times (1-\sigma)^{M-i} = \frac{(M-i) \times (M-i-1)!}{1! \times (M-i-1)!} \times \sigma^1 \times (1-\sigma)^{M-i} = (M-i) \times \sigma \times (1-\sigma)^{M-i}$

Ou

« Tous réémettent sauf un des terminaux bloqués »

$1 - \mathcal{B}(1,p) = 1 - \binom{i}{1} \times p^1 \times (1-p)^{i-1} = 1 - \frac{i \times (i-1)!}{1! \times (i-1)!} \times p \times (1-p)^{i-1} = 1 - i \times p \times (1-p)^{i-1}$

« Aucun des $M-i$ terminaux non bloqués n'émet »

$\mathcal{B}(0,\sigma) = \binom{M-i}{0} \times \sigma^0 \times (1-\sigma)^{M-i} = \frac{(M-i)!}{0! \times (M-i-0)!} \times 1 \times (1-\sigma)^{M-i} = (1-\sigma)^{M-i}$

« Aucun des terminaux bloqués ne réémet si un seul des $M - i$ terminaux non bloqués émet ou ils réémettent tous sauf un parmi les terminaux bloqués si aucun des terminaux non bloqués n'émet. »

$p_{ij} = (1-p)^i \times (M-i) \times \sigma \times (1-\sigma)^{M-i-1} + (1 - i \times p \times (1-p)^{i-1}) \times (1-\sigma)^{M-i}$

$j = i$

« Les i terminaux bloqués réémettent tous »

$1\text{-}\mathcal{B}(0, i) = 1 - \binom{i}{0} \times p^0 \times (1-p)^i = 1 - \frac{i!}{0! \times (i-0)!} \times 1 \times (1-p)^i = 1 - (1-p)^i$

« Un seul des $M - i$ terminaux non bloqués émet. »

$\mathcal{B}(1,\sigma) = \binom{M-i}{1} \times \sigma^1 \times (1-\sigma)^{M-i} = \frac{(M-i)\times(M-i-1)!}{1!\times(M-i-1)!} \times \sigma^1 \times (1-\sigma)^{M-i} = (M-i) \times \sigma \times (1-\sigma)^{M-i}$

« La probabilité qu'un seul des terminaux non bloqués émet si aucun des terminaux bloqués ne réémet »

$p_{ij} = (M-i) \times \sigma \times (1-\sigma)^{M-i} \times (1-(1-p)^i)$ $\qquad j = i + 1$

«Parmi les M-i terminaux non bloqués seuls $j - i$ réémettent »

$\mathcal{B}(j\text{-}i, M\text{-}i) = \binom{M-i}{j-i} \times \sigma^{j-i} \times (1-\sigma)^{M-j} = \frac{(M-i)!}{(j-i)!\times(M-i-(j-i))!} \times \sigma^{j-i} \times (1-\sigma)^{M-j}$

« La probabilité que les $M - i$ terminaux non bloqués émettent et qu'il y ait 2 terminaux ou plus qui se rajoutent à ceux qui sont bloqués à l'étape t. »

$p_{ij} = \frac{(M-i)!}{(j-i)!\times(M-i-(j-i))!} \times \sigma^{j-i} \times (1-\sigma)^{M-j}$ $\qquad j \geq i + 2$

Cette chaine de Markov est récurrente et elle finit par se stabiliser aux alentours de M (M grand) : la plupart des terminaux sont bloqués.

Le fait que M soit grand cela nous amène à considérer le modèle « infini » dans lequel $M \to +\infty$ et $\sigma \to 0$ tel que $M\sigma \to \alpha$ fini ; ainsi les probabilités de transition deviennent $(pour\ i, j \geq 0)$

« La probabilité de voir 2 terminaux ou plus non bloqués parmi les i qui le sont actuellement est nulle»

$p_{ij} = 0$ $\qquad j \leq i - 2$

« Parmi les i terminaux bloqués 1 seul réémet.»

$\mathcal{B}(1,p) = \binom{i}{1} \times p^1 \times (1-p)^{i-1} = \frac{i\times(i-1)!}{1!\times(i-1)!} \times p \times (1-p)^{i-1} = i \times p \times (1-p)^{i-1}$

« Parmi les $M - i$ terminaux non bloqués aucun n'émet »

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^0}{0!} \times e^{-\alpha} = 1 \times e^{-\alpha} = e^{-\alpha}$$

«La probabilité d'avoir un terminal bloqué en moins si aucun des $M - i$ terminaux non bloqués n'a émis. »

$$p_{ij} = i \times p \times (1-p)^{i-1} \times e^{-\alpha} \qquad j = i - 1$$

«Parmi les i terminaux bloqués aucun ne réémet. »

$\mathcal{B}(0,p) = \binom{i}{0} \times p^0 \times (1-p)^i = \frac{i!}{0! \times (i-0)!} \times 1 \times (1-p)^i = (1-p)^i$

« Parmi les $M - i$ terminaux non bloqués 1 seul émet. »

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^1}{1!} \times e^{-\alpha} = \alpha \times e^{-\alpha}$$

« Parmi les i terminaux bloqués au moins 1 réémet. »

$1 - \mathcal{B}(1,p) = 1 - \binom{i}{1} \times p^1 \times (1-p)^{i-1} = 1 - \frac{i \times (i-1)!}{1! \times (i-1)!} \times p \times (1-p)^{i-1} = 1 - i \times p \times (1-p)^{i-1}$

« Aucun des terminaux non bloqués n'émet »

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^0}{0!} e^{-\alpha} = 1 \times e^{-\alpha} = e^{-\alpha}$$

« La probabilité qu'aucun des terminaux bloqués n'émet tandis qu'un des terminaux non bloqué émet ou qu'il y en ait au moins un qui réémet si aucun des terminaux non bloqué n'a émis. »

$p_{ij} = (1-p)^i \times \alpha \times e^{-\alpha} + 1 - i \times p \times (1-p)^{i-1} \times e^{-\alpha} \qquad j = i$

«Parmi les terminaux non bloqués 1 seul émet. »

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^1}{1!} \times e^{-\alpha} = 1 \times e^{-\alpha} = \alpha \times e^{-\alpha}$$

« Parmi les terminaux bloqués au moins 1 réémet »

$1 - \mathcal{B}(1,p) = 1 - \binom{i}{1} \times p^1 \times (1-p)^{i-1} = 1 - \frac{i \times (i-1)!}{1! \times (i-1)!} \times p \times (1-p)^{i-1} = 1 - i \times p \times (1-p)^{i-1}$

« La probabilité qu'un des terminaux non bloqués émet si au moins un des terminaux bloqués a émis. »

$p_{ij} = \alpha \times e^{-\alpha} \times (1 - i \times p \times (1-p)^{i-1}) \qquad j = i + 1$

« La probabilité qu'il y ait 2 terminaux ou plus de bloqués à l'étape $t + 1$ lorsque seuls les terminaux non bloqués ont émis. »

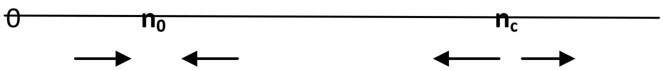
$$p_{ij} = P(\alpha) = \frac{\alpha^{j-i}}{(j-i)!} \times e^{-\alpha} \qquad\qquad j \geq i + 2$$

On Remarque donc qu'il s'agit là d'un flux d'émissions Poissonnien de paramètre α. (Ce qui est logique puisque l'on traite le même problème aux limites). Dans ce cas la chaine de Markov est transiente pour tout $p\ et\ \alpha$ donc ne stabilise jamais et le nombre de terminaux bloqués tend vers l'infini.

L'étude du comportement transitoire nous intéressera d'autant plus que le temps mis pour un over flow (dépassement de capacité) dépend de la valeur des paramètres.

Suivant les paramètres le système met en évidence deux valeurs n_0 et n_c qui sont des points d'équilibre définis par l'équation $E(N(t+1) - N(t)|N(t) = n) = 0$, la première est une valeur autour de laquelle le système se stabilise longtemps quant à la dernière c'est celle atteinte avant que le système « n'implose » le canal **sature**.

Le temps de fonctionnement du système est le temps moyen d'atteinte de n_0 à n_c qui peut permettre de mesurer la stabilité du système.



Remerciements

Tous mes remerciements à Madame Anne Perrut qui a bien voulu me consacrer de son temps et m'aider à travers mes recherches, et qui m'a gracieusement proposé de m'intéresser d'un peu plus près au comportement du système ALOHA en certaines conditions.

Index

Variable aléatoire :

Une variable aléatoire est une fonction à valeurs réelles infinies ou finies, et définie sur un espace d'épreuves Ω. Si cette fonction ne prend que des valeurs finies, on dit de X que c'est une variable aléatoire.

Espace d'épreuves :

Suite finie ou infinie de nombres ou une fonction. C'est en général un objet mathématique qui possède une interprétation physique.

Espace de probabilités :

Un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un triplet où Ω est un ensemble, $\mathscr{A}$ une tribu de parties de Ω et P une probabilité sur $\mathscr{A}$, i.e. une fonction sigma-additive telle que $P(\Omega)= \mathscr{A}$.

Tribu :

Soit X un ensemble. On appelle tribu sur X, un ensemble Ą de parties de X qui vérifie :

$\mathscr{A}$ n'est pas vide.

$\mathscr{A}$ est stable par son complémentaire.

$\mathscr{A}$ est stable par union dénombrable.

Graphe connexe :

Un graphe est dit connexe lorsque deux sommets quelconques sont toujours les extrémités d'une chaine de ce graphe.

Chaine :

Une chaine est une suit e de sommets.

Code de simulation de l'application des chaines de Markov :

#Remplissage de la matrice de transition avec des valeurs suivant les lois de Poisson ou/et loi #binomiale selon les différents cas de réémission par rapport aux nombres de terminaux bloqués :

#pour M très grand (nombre d'utilisateurs) ; Emission d'un paquet avec une loi de Bernoulli de paramètre σ Le paquet est directement envoyé.

#A déjà émis et le paquet a été bloqué, réémission à chaque instant suivant une loi de Bernoulli de #paramètre p (constant).

```
# pij=Prob(N(t+1)=j|N(t)=i)

remplissage<-function(M,sigma,p)

{matrix=(0,ncol=M, nrow=M);

for (i in 0:M)

{for (j in 0:M)

{ if (j == i-1)

 { matrice[i+1,j+1]=dbinom(1,i,p)*dbinom(0,M-i,sigma); }

 else if (j == i)

 {matrice[i+1,j+1]=dbinom(0,i,p)*dbinom(1,M-i,sigma)+(1-dbinom(1,i,p))*dbinom(0,M-i,sigma); }

 else if (j == i+1)

{matrice[i+1,j+1]=dbinom(1,M-i,sigma)*(1-dbinom(0,i,p)); }

 else (j >= i+2)

 {matrice[i+1,j+1]=dbinom(j-i, M-i, sigma);}

}} return(matrice)}
```

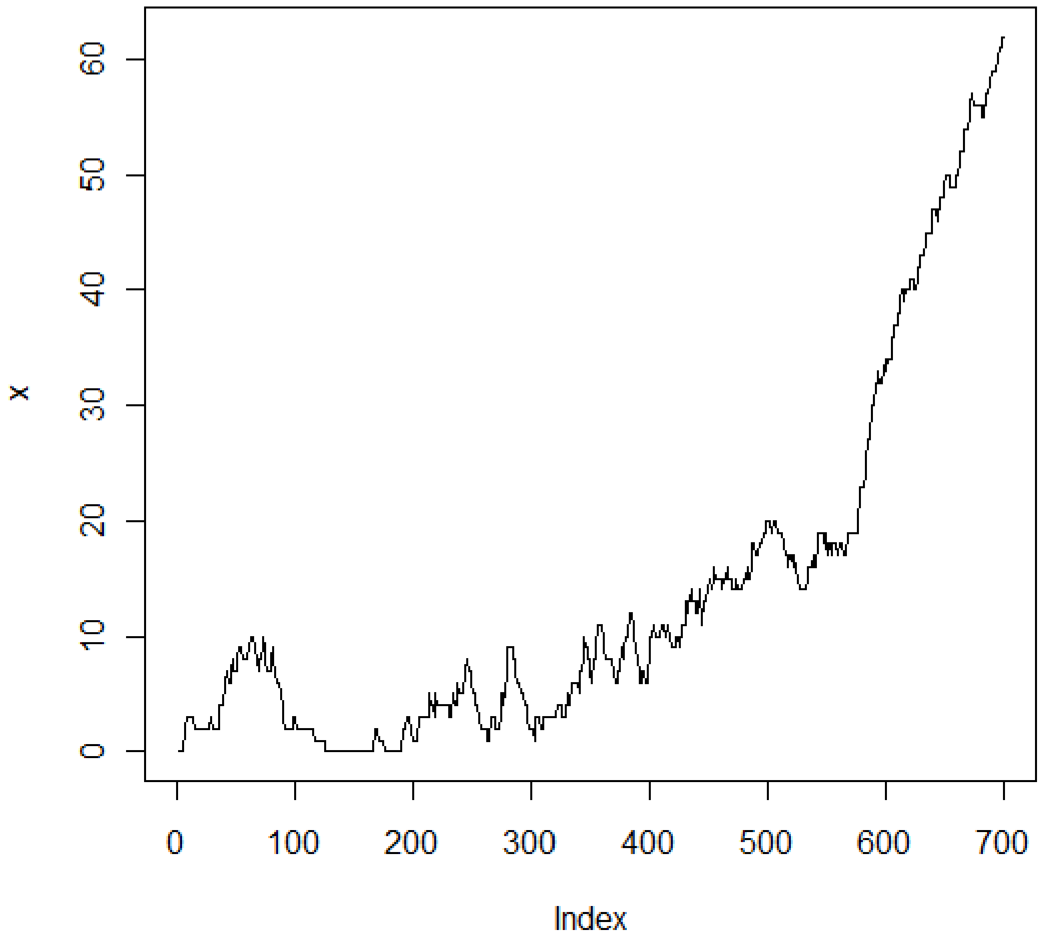
```
#pour M très grand

# pij=Prob(N(t+1)=j|N(t)=i)
```

#pour M très grand ($M -> +\infty$) et $\sigma -> 0$ tel que $M \times \sigma = \alpha$

```
remplissage2<-function(M, sigma, p)

{a=M*sigma;

matrix=(0, ncol=M+1, nrow=M+1);

for (i in 0:M)

{for (j in 0:M)

{ if (j == i-1)

{matrice[i+1,j+1]=dbinom(1,i,p)*dpois(0,a);}

else if (j == i)

{matrice[i+1,j+1]=dbinom(0,i,p)*dpois(1,a)+(1-dbinom(1,i,p))*dpois(0,a);}

else if (j==i+1)

{matrice[i+1,j+1]=dpois(1,a)*(1-dbinom(0,i,p));}

else if (j >= i+2)

{matrice[i+1,j+1]=dpois(j-i,a);}

}}return(matrice)}


nextstage<-function(matrice,n)

{x0=0;#0 serveurs bloqués

x=rep(0,n);

x[1]=x0;

for(k in 1:(n-1))

{x[k+1]=sample(0 :M, prob=matrice[x[k]+1,],1);

#loi de x[k+1] x[k]-ième ligne de la matrice de transition.

}return(x)}
```

Voici une illustration du modèle obtenu à partir des fonctions précédemment définies.

En prenant M=100, sigma=0.01, p=0.0027 ;



En observant le comportement de la courbe, on remarque que notre système tend à se stabiliser autour de la valeur 4 parce que bien que atteignant d'autres valeurs inférieurs à 10, elle revient très souvent à cette première valeur ; il est tout aussi remarquable de voir que le système explose au-delà de la valeur 10.

Ainsi on peut donc en conclure que notre valeur de stabilisation $n_0 = 4$, et notre valeur de saturation $n_c = 10$, selon nos paramètres spécifiquement choisis.