Rapport de T.I.P.E

Licence Mathématiques L2

Méthode de Newton pour différentes décompositions matricielles et autres algorithmes de calcul de valeurs propres

Benjamin MASSON

réalisé sous la direction de Philippe CALDERO

27 juin 2017

Table des matières

Chapitre 1

La méthode de Newton

1.1 Introduction

La méthode de Newton (parfois appelée méthode de Newton-Raphson) est un algorithme efficace qui permet de trouver numériquement une approximation précise d'un zéro d'une fonction. La méthode telle que décrite par Newton se place dans le contexte de fonction réelle. Nous nous intéressons ici à un cadre plus général où cet algorithme est appliqué aux matrices. Le principal avantage de cet algorithme est sa rapidité de convergence.

1.2 Présentation de la méthode

Soit f une fonction réelle dont on cherche les zéros.
Exemple : calculer une racine carrée revient à annuler la fonction $f(x) = x^2 - a$, pour tout réel a positif.

Proposition 1 *Soit $a > 0$ alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, définie par $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ et $x_0 > 0$, converge vers $\sqrt{a}$ de manière quadratique. C'est à dire, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $k \geq 1$ on a $|x_{k+1} - \sqrt{a}| < C|x_k - \sqrt{a}|^2$. Autrement dit, la suite des x_k converge vers $\sqrt{a}$ et la précision de l'approximation double à chaque itération.*

Démonstration. Ici $f'(x) = 2x$ donc on a

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} \\ &= \frac{2x_k^2 - x_k^2 + a}{2x_k} \\ &= \frac{x_k^2 + a}{2x_k} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \end{aligned}$$

On initialise en $x_0 > 0$ ce qui va assurer $x_k > 0$ donc $f'(x_k) \neq 0$ pour tout k et en particulier l'existence de la suite.
Or, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$ on a $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$ (autrement dit la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique).

On en déduit $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}) \geq \sqrt{a}$ pour tout entier naturel k.
De plus, on a

$$\begin{aligned}
x_{k+1} - x_k &= \frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} - x_k \\
&= -\frac{1}{2}x_k + \frac{a}{2x_k} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_k} - x_k\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{a - x_k^2}{x_k} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{a} - x_k)(\sqrt{a} + x_k)}{x_k} \leq 0.
\end{aligned}$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc elle converge vers une limite ℓ qui vérifie
$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell}) \Leftrightarrow 2\ell = \ell + \frac{a}{l} \Leftrightarrow \ell^2 = a$ or $\ell \geq 0$ donc $\ell = \sqrt{a}$.
On a donc montré que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \sqrt{a}$.
Intéressons nous maintenant à la vitesse de convergence de la suite. Notons F la fonction telle que $x_{k+1} = F(x_k)$ on a alors $F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. F est continue sur $]0, +\infty[$ donc en particulier sur $[\sqrt{a}, x_k]$ pour tout k, de plus F est dérivable sur $]\sqrt{a}, x_k[$ pour tout k. Alors, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]\sqrt{a}, x_k[$ tel que :

$$F(\sqrt{a}) - F(x_k) = F'(c)\left(\sqrt{a} - x_k\right)$$

Or, $F(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \sqrt{a}\right) = \sqrt{a}$ et par définition $F(x_k) = x_{k+1}$ donc

$$\begin{aligned}
x_{k+1} - \sqrt{a} &= F'(c)\left(x_k - \sqrt{a}\right) \\
&= \left(\frac{c^2 - a}{2c^2}\right)\left(x_k - \sqrt{a}\right)
\end{aligned}$$

or pour tout $k \geq 1$ on a $0 < \sqrt{a} < c < x_k$ donc

$$\begin{aligned}
0 < \frac{c^2 - a}{2c^2} < \frac{x_k^2 - a}{2x_k^2} &= \frac{x_k + \sqrt{a}}{2x_k^2}\left(x_k - \sqrt{a}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2x_k} + \frac{\sqrt{a}}{2x_k^2}\right)\left(x_k - \sqrt{a}\right) \\
&< \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{2a}\right)\left(x_k - \sqrt{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(x_k - \sqrt{a}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne au final :

$$\begin{aligned}
\left|x_{k+1} - \sqrt{a}\right| &= \left|\left(\frac{c^2 - a}{2c^2}\right)\left(x_k - \sqrt{a}\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{\sqrt{a}}\left(x_k - \sqrt{a}\right)\left(x_k - \sqrt{a}\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{a}}\left|x_k - \sqrt{a}\right|^2 = C\left|x_k - \sqrt{a}\right|^2 \quad \text{avec } C > 0
\end{aligned}$$

On a donc montré qu'il existe un réel positif $C = \frac{1}{\sqrt{a}}$ tel que $\forall\, k \geq 1$ on a $|x_{k+1} - \sqrt{a}| \leq C\left|x_k - \sqrt{a}\right|^2$.

□

1.3 Point de vue graphique

D'un point de vue graphique, la suite des itérés (x_k) est construite avec la méthode suivante : on part de x_0 et on construit x_1 comme l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à f en x_0 et l'axe des x. En continuant de la même manière, on obtient, x_{k+1} l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à f en x_k et l'axe des x. On rappelle que l'équation de la tangente à f en un réel a est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. On définit x_{k+1} comme le réel qui vérifie $f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + f(x_k) = 0$ autrement dit $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.
On peut voir sur le graphique un exemple avec $f(x) = x^2 - 2$, c'est à dire que l'on cherche à approcher $\sqrt{2}$ en partant de $x_0 = 3$.

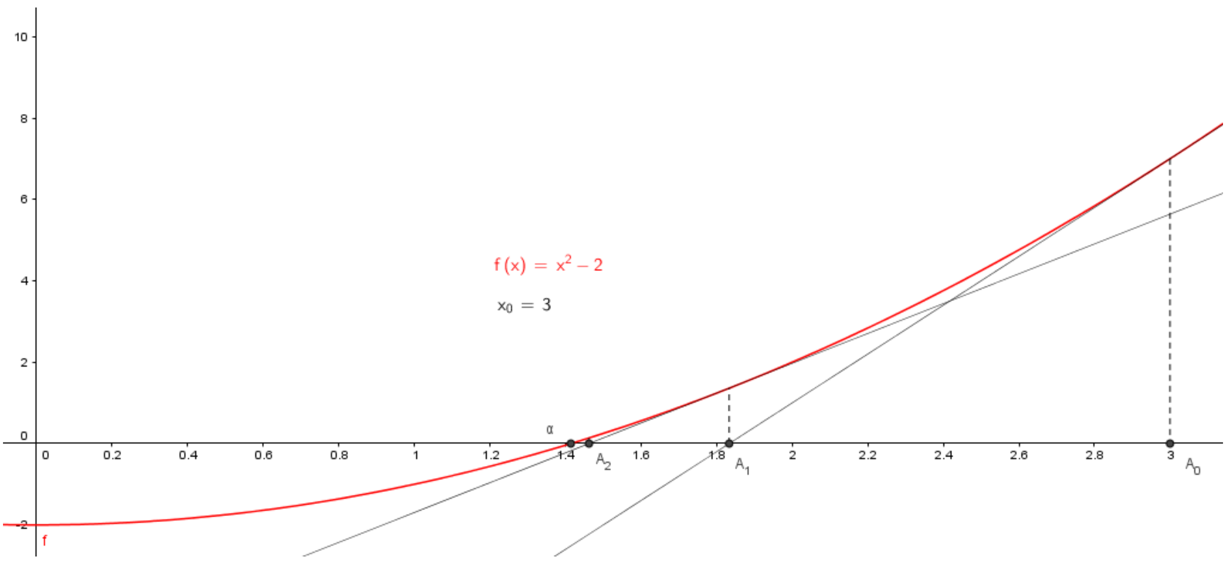

FIGURE 1.1 – Exemple graphique de la méthode de Newton pour approcher $\sqrt{2}$.

Chapitre 2

La décomposition polaire

Introduction

La décomposition polaire généralise celle bien connue dans $\mathbb{C}^*$. En effet, on peut voir les nombres complexes comme $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on peut poser $Z = (z)$, alors $Z = OS$ avec $O = \left(e^{i\theta}\right)$ et $S = (r)$ où $re^{i\theta}$ est la forme polaire du nombre complexe z. Cette décomposition peut être étendue à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on aurait alors $Z = OS$ avec O une matrice unitaire et S une matrice hermitienne définie positive. Pour la suite du chapitre, nous nous intéresserons à la décomposition polaire pour des matrices à coefficients réels. On aura alors les matrices unitaires qui seront des matrices orthogonales et les matrices hermitiennes seront des matrices symétriques.

Proposition 2 *Soit M une matrice inversible réelle, c'est à dire $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors M se décompose de manière unique comme produit de deux matrices O et S avec O orthogonale, c'est à dire $O \in O_n(\mathbb{R})$, et S symétrique définie positive, c'est à dire $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. De manière plus générale, la multiplication matricielle induit l'homéomorphisme[1] suivant :*

$$\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad (O, S) \mapsto OS.$$

Démonstration. L'application μ est bien définie et continue. Commençons par montrer sa surjectivité. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrons qu'il existe un couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.
La matrice ${}^tMM$ est symétrique définie positive. En effet, ${}^tMM = {}^tM\,\mathrm{I_n}\,M$ c'est à dire que ${}^tMM$ est *congruente*[2] à la matrice identité. D'après le théorème spectral, on peut diagonaliser ${}^tMM$ dans une base orthonormée de vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i, $i = \{1, \cdots, n\}$. Ainsi :

$${}^tMM = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

1. Un homómorphisme est une application bijective continue telle que sa bijection réciproque est continue. Dans ce paragraphe, nous montrerons seulement la bijectivité de μ sans parler de la continuité de μ^{-1}.
2. On peut rappeler que deux matrices carrées A, B sont dites congruentes s'il existe une matrice P telle que $A = {}^tPBP$.

pour $P \in O_n(\mathbb{R})$ convenable, et $\lambda_i > 0$ pour tout i. On pose alors :

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Donc S est symétrique, puisque P est orthogonale, et S est définie positive car ses valeurs propres $\sqrt{\lambda_i} > 0$, pour tout i.
On a alors :

$$\begin{aligned} S^2 &= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = {}^t\!MM \end{aligned}$$

De plus, si on pose : $O = MS^{-1}$, alors :

$$ {}^t\!OO = {}^t\!\left(MS^{-1}\right) MS^{-1} = {}^t\!S^{-1}\, {}^t\!MMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathrm{I_n}\,.$$

Ainsi, $M = OS$, avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc μ est surjective.
Montrons maintenant que μ est injective. Supposons que l'on ait $M = OS = O'S'$ avec $O' \in O_n(\mathbb{R})$ et $S' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Alors on a : $S^2 = {}^t\!MM = {}^t(O'S')\, O'S' = {}^t\!S'\, {}^t\!O'O'S' = S'\, \mathrm{I_n}\, S'$ d'où $S^2 = S'^2$. Il reste à montrer que cela implique $S = S'$. Pour cela, on pose Q un *polynôme d'interpolation*[3] tel que pour tout i, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. Alors :

$$\begin{aligned} S &= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} = PQ\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) P^{-1} \\ &= Q\left(P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}\right) = Q(S^2) = Q(S'^2) \end{aligned}$$

Or, S' commute avec S'^2, donc avec $Q(S'^2) = S$. Donc S' et S sont deux matrices symétriques définies positives qui commutent entre elles, alors elles sont simultanément diagonalisables par une matrice

3. On peut utiliser un polynôme d'interpolation de Lagrange. Pour cela, quitte à renuméroter les λ_i, on peut supposer les $\lambda_i, \cdots, \lambda_r$ distincts et les $\lambda_{r+1}, \cdots, \lambda_n$ apparaissant parmi ceux-là. On peut donc prendre :

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\lambda_i} \prod_{\substack{1 \le j \le r \\ j \ne i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

orthogonale. Il existe une matrice de passage P_0 qui permet de les diagonaliser simultanément. Ainsi, si l'on note

$$\operatorname{diag}(\mu_i) = \begin{pmatrix} \mu_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix},$$

on a : $S' = P_0 \operatorname{diag}(\mu'_i) P_0^{-1}$ et $S = P_0 \operatorname{diag}(\mu_i) P_0^{-1}$ avec μ'_i (respectivement μ_i) pour $i = \{1, \cdots, n\}$ les valeurs propres de S' (respectivement S). Ainsi :

$$\begin{aligned} S'^2 = S^2 &\Rightarrow P_0 \operatorname{diag}(\mu'_i) = P_0 \operatorname{diag}(\mu_i) P_0^{-1} \\ &\Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n, \mu'^2_i = \mu_i^2 \\ &\Rightarrow \forall\, 1 \leq i \leq n, \mu'_i = \mu_i, \quad (S, S' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ donne } \mu'_i, \mu_i \in \mathbb{R}_+^*) \\ &\Rightarrow S = S'. \end{aligned}$$

Il suit immédiatement $O = O'$, ce qui permet de montrer l'injectivité de μ.

$\square$

Chapitre 3

Méthode de Newton pour la décomposition polaire

Proposition 3 *La suite* (M_k) *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *donnée par* $M_0 = M$ *et* $M_{k+1} = \frac{1}{2}M_k(I_n + ({}^tM_kM_k)^{-1})$ *est bien définie, converge vers* O*, où* $M = OS$ *est la décomposition polaire de* M *dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*. La suite* $({}^tM_kM)_k$ *converge alors vers* S*.*

Démonstration. Montrons d'abord que M_k est bien dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout k ce qui permettra aussi d'affirmer que M_n est bien définie pour tout n.
Tout d'abord, on a déjà vu que pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tAA$ est symt́rique définie positive. Donc, $({}^tAA)^{-1}$ a toutes ses valeurs propres strictement positives, et comme $\mathrm{I_n}$ commute avec $({}^tAA)^{-1}$ alors $\mathrm{I_n} +({}^tAA)^{-1}$ a toutes ses valeurs propres strictement superieures à 1 donc *a fortiori* strictement positives. C'est à dire, $\mathrm{I_n} +({}^tM_kM_k)^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Montrons par récurrence que M_k est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout k.
Initialisation. Pour $k = 0$, $M_k = M_0 = M$ avec M dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Hérédité. On suppose $M_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ montrons que $M_{k+1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. $M_{k+1} = \frac{1}{2}M_k(\mathrm{I_n} +({}^tM_kM_k)^{-1})$ or on a vu que $(\mathrm{I_n} +({}^tM_kM_k)^{-1}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et par hypothèse de récurrence $M_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Donc M_{k+1} est le produit de deux matrices dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que M_{k+1} est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On a donc montré que M_k est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour tout k.
Donc, la décomposition polaire de M_k existe pour tout k, à savoir $M_k = O_kS_k$ avec O_k matrice orthogonale et S_k matrice symétrique définie positive.
On a, par construction, ${}^tM_kM_k = {}^t(O_kS_k)(O_kS_k) = {}^tS_k\,{}^tO_kO_kS_k = S_kO_k^{-1}O_kS_k = S_k^2$.
Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
M_{k+1} &= \frac{1}{2}M_k\left(\mathrm{I_n} + \left({}^tM_kM_k\right)^{-1}\right) \text{ (On peut remplacer } M_k \text{ par } O_kS_k \text{ et } {}^tM_kM_k \text{ par } S_k^2.) \\
O_{k+1}S_{k+1} &= \frac{1}{2}O_kS_k\left(\mathrm{I_n} + \left(S_k^2\right)^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}O_kS_k + \frac{1}{2}O_kS_kS_k^{-2} \\
&= \frac{1}{2}O_k\left(S_k + S_k^{-1}\right)
\end{aligned}$$

Donc par unicité de la décomposition polaire, $O_{k+1} = O_k$. De plus, S_k et S_k^{-1} sont deux matrices symétriques, définies positives qui commutent entre elles, donc $\frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1})$ est symétrique définie positive. Alors $S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1})$.

D'après le théorème spectral, on peut diagonaliser S_k. Si l'on note P la matrice de passage et λ_i les valeurs propres de S, on a alors :

$$S_k = P\,\mathrm{diag}(x_k^i)P^{-1}$$

avec (x_k^i) tel que $x_0^i = \lambda_i$ et $x_{k+1}^i = \frac{1}{2}(x_k^i + (x_k^i)^{-1})$ pour $i = \{1, \cdots, n\}$
Il suit :

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} S_k &= \lim_{k\to\infty} \left(P\,\mathrm{diag}\left(x_k^i\right)P^{-1}\right) \\ &= P(\lim_{k\to\infty} \mathrm{diag}\left(x_k^i\right))\,P^{-1}\end{aligned}$$

car $X \mapsto PXP^{-1}$ est continue. Donc :

$$\lim_{k\to\infty} S_k = P\,\mathrm{diag}\left(\lim_{k\to\infty} x_k^i\right)P^{-1}.$$

Or, la suite x_k^i est définie par la relation de récurrence $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k^i + \frac{1}{x_k^i}\right)$ avec $x_0^i > 0$ puisque S est définie positive. Cette suite n'est autre que celle de la méthode de Newton (présentée au paragraphe précedent) pour annuler la fonction $f(x) = x^2 - a$ avec ici $a = 1$. On a donc montré la convergence de cette suite vers la limite $\sqrt{a} = \sqrt{1} = 1$. Donc $\lim_{k\to\infty} x_k^i = 1$, on en déduit :

$$\lim_{k\to\infty} S_k = P\,\mathrm{diag}\,(1)\,P^{-1} = P\,\mathrm{I_n}\,P^{-1} = \mathrm{I_n}\,.$$

Donc, $\lim_{k\to\infty} M_k = \lim_{k\to\infty} O_kS_k = O_k = O$.
On a montré que la suite M_k converge vers O. Montrons à présent que la suite définie par $N_0 = {}^tMM$ et $N_{k+1} = \frac{1}{2}\left(N_k + ({}^tMM)\,N_k^{-1}\right)$ converge vers S.
Montrons par récurrence que N_k est symétrique définie positive et est un somme de puissance de S.
Initialisation. $k = 0$, on a $N_k = N_0 = {}^tMM = S^2$ (on l'a déjà montré) donc la propriété est vérifiée pour $k = 0$.
Hérédité. On suppose qu'il existe un k tel que N_k soit dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit une somme de puissances de S et montrons que cela reste vrai pour N_{k+1}. On a

$$N_{k+1} = \frac{1}{2}\left(N_k + S^2N_k^{-1}\right)$$

Or par hypothèse de récurrence N_k est une somme de puissances de S donc $\frac{1}{2}\left(N_k + S^2N_k^{-1}\right)$ l'est aussi. De plus, cela permet que N_k et $S^2N_k^{-1}$ commutent entre elles et sont symétriques définies positives. On peut donc conclure que N_{k+1} est symétrique définie positive.
On a montré que $N_k \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour tout k. Par le théorème spectral, on peut diagonaliser N_k dans une base orthonormée. Si l'on note P la matrice de passage, et γ_i les valeurs propres de S^2, on a alors :

$$N_k = P\,\mathrm{diag}\left(x_k^i\right)P^{-1}$$

avec P bien choisie et $x_0^i = \gamma_i$ et $x_{k+1}^i = \frac{1}{2}\left(x_k^i + \gamma_i(x_k^i)^{-1}\right)$
Par un raisonnement analogue à celui mené précédemment, on obtient

$$\lim_{k\to\infty} N_k = P\,\mathrm{diag}\,(\lambda_i)\,P^{-1}$$

avec $\lambda_i = \sqrt{\gamma_i}$, les valeurs propres de S. Puisque $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et qu'on a écrit $\lim_{k\to\infty} N_k$ dans une base orthonormée comme ayant exactement les valeurs propres de S, on peut alors conclure :

$$\lim_{k\to\infty} N_k = S.$$

$\square$

3.1 Vérification informatique

On souhaite tester cet algorithme avec un cas concret. On peut alors choisir deux matrices; O orthogonale et S symétrique définie positive. On a vu la bijection de $O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc, si l'on prend $M = OS$ et que l'on effectue l'algorithme présenté en prenant $M_0 = M$ et $M_{k+1} = \frac{1}{2} M_k \left(\mathrm{I}_3 + ({}^tM_k M_k)^{-1}\right)$; alors, on aura $\lim_{k\to\infty} M_k = O$.
Vérifions cela avec un exemple pour $n = 3$.
On pose $O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Soit $M = OS = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Avec le logiciel Scilab, on implémente l'algorithme de la façon suivante : (*cf.* Figure 3.1)

```
M = [-1,5,4;2,4,5;5,-1,2];          //definition de la matrice etudiee
disp(M,'M_0 =');

deff('y = f(x,z)','y = 1/2*x*(eye(3,3)+inv(z*x))') //notre relation de recurrence

nbiter = 200;                       // nombre d'iterations a effectuer
i = 0;                              // initialisation du compteur

if det(M) ~= 0                      // on verifie que M soit inversible
    while i < nbiter
        M = f(M,M');                // M' est la transposee de M
        i = i+1;
    end
end

disp(M,'O = lim M_k = ');
disp(M*M','O*O'' =');                       // on verifie que la matrice est orthogonale
```

FIGURE 3.1 – Exemple d'implémentation de l'algorithme pour la décomposition polaire d'une matrice 3×3

Le résultat obtenu est donc le suivant : (*cf.* Figure 3.2)

```
 M_0  =                    O  =  lim M_k  =                           O*O'  =

  -1.    5.    4.           -1.544D-15    1.           2.460D-15        1.    0.    0.
   2.    4.    5.           -9.625D-16   -2.460D-15    1.               0.    1.    0.
   5.   -1.    2.            1.            1.544D-15   9.625D-16        0.    0.    1.
```

FIGURE 3.2 – Affichage après 200 itérations

On observe donc que la matrice obtenue par ce procédé semble être orthogonale, puisque le produit avec sa transposée donne bien I_3. Cependant, l'affichage du résultat montre que les 0 théoriques qui devraient apparaître dans la matrice finale sont en fait des valeurs extrêment petites en valeur absolue. On peut expliquer ces écarts par les erreurs de calcul de la machine qui travaille toujours avec une précision finie.

Chapitre 4

Méthode de Newton pour la décomposition de Dunford

Proposition 4 *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de polynôme caractéristique χ_A et de décomposition de Dunford $A = D + N$. On pose $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi'_A}$ et on considère la suite de matrice (A_r) donnée par*

$$A_0 = A\,;A_{r+1} = A_r + P(A_r)P'(A_r)^{-1}$$

Alors cette suite est bien définie et est stationnaire et tend vers D. Plus précisément, $A_m = D$ pour tout $m \geq \log_2(n)$.

Démonstration. Tout d'abord, P est-il bien défini ? Le polynôme P est un quotient de polynômes, en tant que fraction rationnelle, P est bien défini si son dénominateur ne s'annule pas. Le fait que le $\mathbb{K}$ soit de caractéristique nulle fait qu'il n'existe pas d'entier n tel que : $n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$. Par exemple, le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un corps fini, de caractéristique 3 (on a : $\mathbb{1} + \mathbb{1} + \mathbb{1} = 0$) . Dans un tel corps, la dérivée de $x^3 - 1$ est nulle.

Ici, par contre, on a bien χ'_A qui ne s'annule pas et donc $\chi_A \wedge \chi'_A$ ne s'annule pas. En tant que fraction rationnelle, P est bien défini. De plus, par définition du PGCD, $\chi_A \wedge \chi'_A$ divise χ_A. Donc P est un polynôme. Si on note λ_i les valeurs propres de A et $m_i \geq 1$ la multiplicité des λ_i de sorte que $\chi_A = (X - \lambda_i)^{m_i}\, Q$ où Q est un polyôme qui ne s'annule pas en λ_i. Alors $\chi'_A = m_i(X - \lambda_i)^{m_i - 1}\, Q + (X - \lambda_i)^{m_i} Q'$. On travaille toujours en caractéristique 0 donc, le premier terme ne s'annule pas et ainsi chaque λ_i est une racine de multiplicité $(m_i - 1)$. On peut conclure : on a bien un polynôme P qui a pour racines les valeurs propres de A qui sont des racines simples.

À présent, montrons par récurrence sur $r \geq 0$ que :

1. la matrice $P(A_r)$ est nilpotente d'indice de nilpotence $v_r \leq 1 + \frac{n-1}{2^r}$,
2. la matrice $P'(A_r)$ est inversible,
3. la matrice A_{r+1} est bien définie et appartient à $\mathbb{K}[A]$.

Dans un premier temps montrons que cela prouve la proposition initiale. Si on suppose vraies ces trois assertions, alors A_r est bien définie pour tout $r \geq 0$. Et on a les A_r qui commutent entre elles par (3) car $A_{r+1} \in \mathbb{K}[A]$ signifie que A_{r+1} est un polynôme en A, et de manière évidente, deux polynômes en A commutent.

De plus, on a $P(A_m)$ d'indice de nilpotence $v_m = 1$ pour $m \geq \log_2(n)$. En effet, d'après (1) $P(A_m)^{v_m} = 0_n$ pour $v_m \leq 1 + \frac{n-1}{2^m}$. Si $m \geq \log_2(n)$ alors $v_m \leq 1 + \frac{n-1}{2^m} \leq 1 + \frac{n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2$ or v_m est entier donc $v_m = 1$.
C'est à dire $P(A_m)^1 = P(A_m) = 0_n$, et la suite est bien stationnaire puisque $A_{m+1} = A_m + 0_n = A_m$, pour tout $m \geq \log_2(n)$.
Comme P est à racines simples, A_m est diagonalisable et on a :

$$A - A_m = (A_0 - A_0) + (A_1 - A_2) + \cdots + (A_{m-1} - A_m)$$

$$= P(A_0)P'(A_0)^{-1} + P(A_1)P'(A_1)^{-1} + \cdots + P(A_m)P'(A_m)^{-1}$$

Soient $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons que si B est nilpotente et $CB = BC$ alors BC est nilpotente. On sait qu'il existe un entier k tel que $B^k = 0_n$. Maintenant, calculons $(BC)^k = BC \cdot BC \cdots BC$, puisque B et C commutent, on peut réordonner pour obtenir $(BC)^k = B^k C^k$ or B^k est nulle donc $(BC)^k$ est nulle, c'est à dire BC est nilpotente.
Ici, on sait que $P(A_r)$ est nilpotente, de plus $P(A_r)$ et $P'(A_r)^{-1}$ commutent car A_r est dans $\mathbb{K}[A]$. Donc d'après la proposition que l'on vient de montrer, $P(A_r)P'(A_r)^{-1}$ est nilpotente. Cela signifie que $A - A_m$ est une somme de matrices nilpotentes qui commutent deux à deux, car ce sont des polynômes en A. Donc $A - A_m$ est nilpotent.
Pour conclure on a $A - A_m$ nilpotent qui commute avec A_m diagonalisable. Par unicité de la décomposition de Dunford de A, on a $A_m = D$ et $A - A_m = N$.
Montrons maintenant les 3 assertions par récurrence.
Initialisation. (r=0) Montrons que $P(A_0) = P(A)$ est bien nilpotente. En effet, toutes les racines de P sont racines de χ_A, et χ_A est de degré n donc divise P^n. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $0_n = P^n(A) = P(A)^n$. On a donc $P(A)$ nilpotente d'indice $v_0 \leq n = 1 + \frac{n-1}{2^0}$. Donc (1) est vraie pour $r = 0$.
Pour montrer (2), montrons d'abord que les valeurs propres de $P'(A)$ sont $P'(\lambda_i)$. Pour cela, soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$ et $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$ les valeurs propres de B, on a

$$\begin{aligned} P(B) &= p_o I_n + p_1 B + p_2 B^2 + \cdots + a_m B^m \\ \text{donc } \; P(B)X &= p_0 X + p_1 BX + p_2 B^2 X + \cdots + p_m B^m X \\ &= p_0 X + p_1 \lambda_j X + p_2 \lambda_j^2 X + \cdots + p_m \lambda_j^m X \\ &= P(\lambda_j) X \end{aligned}$$

Donc on a montré que pour un polynôme P et une matrice B de valeurs propres λ_j alors les valeurs propres de la matrice $P(B)$ sont $P(\lambda_j)$. Ici donc, les valeurs propres de $P'(A)$ sont $P'(\lambda_i)$ et puisque les $P'(\lambda_i)$ sont non nulles alors $P'(A)$ est inversible. Pour montrer (3) on a $A_1 = A - P(A)P'(A)^{-1}$ donc $A_{r+1} = A_1$ est bien définie (car $P'(A)$ est inversible d'après (2) et est un polynôme en A.)
Hérédité. On suppose les trois assertions vraies pour un rang $r \geq 0$, montrons qu'elles restent vraies au rang $r + 1$. On peut commencer par noter que d'après la formule de Taylor polynômiale à l'ordre 2, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X, Y]$ tel que $P(a + h) = P(a) + hP'(a) + h^2 Q(a, h)$ pour tout a, h dans $\mathbb{K}$. Soient maintenant R et S deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors pour tout $x \in \mathbb{K}$, il existe un $\tilde{\mathrm{Q}} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(R(x) + S(x)) = P(R(x)) + S(x)P'(R(x)) + S(x)^2 \tilde{\mathrm{Q}}(x)$. Ici, puisque $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle il ne peut être fini ; il est donc infini. Ainsi, cette identité pour $x \in \mathbb{K}$ peut être élargie dans $\mathbb{K}[X]$:

$$P(R(X) + S(X) = P(R(X)) + S(X)P'(R(X)) + S(X)^2 \tilde{\mathrm{Q}}(X).$$

On peut alors évaluer cette dernière identité en la matrice A, avec R tel que $A_r = R(A)$ et $S = -PT$, où T est un polynôme tel que $T(A) = P'(A_r)^{-1}$. Effectivement, par hypothèse de récurrence, $P'(A_r)$ et appartient à $\mathbb{K}[A]$, donc on peut montrer, en utilisant Cayley-Hamilton, que l'inverse de $P'(A_r)$ est un polynôme en $P'(A_r)$, et donc aussi un polynôme en A.
L'évaluation en A_r donne donc :

$$P(A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}) = P(A_r) - P(A_r)P'(A_r)^{-1}P'(A_r) + P(A_r)^2\tilde{\mathrm{Q}}(A)$$

$$= P(A_r) - P(A_r)I_n + P(A_r)^2T(A_r)^2\tilde{\mathrm{Q}}(A)$$

$$= P(A_r)^2T(A_r)^2\tilde{\mathrm{Q}}(A).$$

On en déduit $P(A_{r+1} = P(A_r)^2T(A_r)^2\tilde{\mathrm{Q}}(A)$. Et comme toutes les matrices commutent (polynômes en A), alors $P(A_{r+1}$ est nilpotente d'indice de nilpotence $v_{r+1} \leq \frac{v_r+1}{2}$. En effet, on a $P(A_r)^{v_r} = 0_n$ donc $(P(A_r)^2)^{\frac{v_r}{2}} = 0_n$ cependant on ne sait rien de la parité de v_r et comme v_{r+1} est un entier, on peut donc écrire l'indice de nilpotence de $P(A_{r+1})$: $v_{r+1} \leq \frac{v_r+1}{2}$. Montrons par récurrence que $v_{r+1} \leq 1 + \frac{n-1}{2^{r+1}}$.
Initialisation. (r = 0) On a $v_0 \leq n$ et on sait que $v_1 \leq \frac{v_0+1}{2}$ donc $v_1 \leq \frac{n+1}{2} = \frac{n-1+2}{2} = 1 + \frac{n-1}{2^1}$
Hérédité. On suppose la proposition vraie pour un rang r, montrons qu'elle est vraie au rang $r+1$. On a $v_{r+1} \leq \frac{v_r+1}{2}$ or $v_r \leq +1\frac{n-1}{2}$ donc

$$v_{r+1} \leq \frac{1 + \frac{n-1}{2^r} + 1}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2^{r+1}} + \frac{1}{2}$$

$$\leq 1 + \frac{n-1}{2^{r+1}}$$

On a donc montré (1). A présent, montrons (2).
Comme le polynôme P est à racines simples il est premier avec P' et on obtient donc une relation de Bezout : $UP + VP' = 1$. On peut évaluer cette identité en A_r ce qui donne :

$$V(A_r)P'(A_r) = I_n - U(A_r)P(A_r).$$

Or, $U(A_r)P(A_r)$ est nilpotente puisque $P(A_r)$ l'est et puisque $U(A_r)$ et $P(A_r)$ commutent (polynômes en A_r donc dans $\mathbb{K}[A]$). Si $U(A_r)P(A_r)$ nilpotente, cela signifie que $V(A_r)P'(A_r)$ est unipotente, c'est à dire qu'il existe un entier naturel k tel $(V(A_r)P'(A_r))^k = I_n$. De cela, on déduit que son spectre est réduit à 1 (c'est à dire la seule valeur propre est 1) et donc de déterminant non nul. Ceci implique que $\det P'(A_r) \neq 0_n$ et on a donc (2). D'après tout ce que l'on vient de montrer, il est clair que $A_{r+1} = A_r - P(A_r)P'(A_r)^{-1}$ est bien définie et appartient à $\mathbb{K}[A]$. Donc l'assertion (3) est vérifiée.

$\square$

Chapitre 5

Méthode des puissances pour matrices symétriques

Motivation.

Dans cette partie, notre but est de calculer des vecteurs propres. Soit M une matrice carrée de taille n, la méthode "traditionnelle" pour calculer un vecteur propre $v \in \mathbb{R}^n$ consiste à trouver la valeur propre λ à laquelle il est associé puis à résoudre l'équation $MX = \lambda X$ pour $X \in \mathbb{R}^n$. Mais, dès lors que l'on s'intéresse à appliquer cette méthode de manière algorithmique et informatique on se heurte à un problème : les valeurs propres sont calculées de manière approchée. Ainsi, lorsque l'on veut résoudre $MX = \tilde{\lambda}X$, avec $\tilde{\lambda}$ la valeur approchée de λ telle que $\tilde{\lambda} = \lambda + \delta$ avec $|\delta| > 0$, puisque $\tilde{\lambda}$ n'est pas valeur propre de M, alors la solution X ne pourra être non nulle et ne sera pas un vecteur propre satisfaisant. Nous essayerons donc ici de présenter un algorithme qui permet, sous certaines conditions, de déterminer un vecteur propre sans passer par le calcul de valeurs propres.

Proposition 5 *Soit S une matrice symétrique rélle, $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose les valeurs propres de S, λ_i, pour $1 \leq i \leq n$ qui vérifient*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une bas orthonormée, où e_i est vecteur propre de S dans $\mathbb{R}^n$, pour la valeur propre λ_i. Soit $x_0 = \sum_i^n \eta_i e_i \in \mathbb{R}^n$. On suppose la coordonnée η_i non nulle. On construit par récurrence :

$$x_{k+1} = Sy_k \ ; \ y_{k+1} = \frac{x_k}{\|x_k\|_2},$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme quadratique canonique de $\mathbb{R}_n$. Alors,

1. *Pour tout k, les suites sont bien définies et (y_{2k}) converge soit vers e_1 soit vers $-e_1$.*
2. *Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui ne s'annule pas sur e_1, alors $\frac{\varphi(Sy_{2k})}{\varphi(y_{2k})}$ est définie à partir d'un certain rang, et tend vers λ_1.*

Démonstration.

1. Pour commencer, on a x_0 non nul, puisque qu'il a une coordonnée non nulle. Donc, $\|x_0\|_2 \neq 0$ ce qui signifie que y_0 est bien définie. On a :

$$y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|_2} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i e_i}{\|\sum_{i=1}^n \eta_i e_i\|_2},$$

et donc :

$$x_1 = Sy_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i S e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \|_2}.$$

Or, par définition, $Se_i = \lambda_i e_i$, et on a supposé par ailleurs $\lambda_1 \neq 0$. On obtient alors :

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \lambda_i e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \|_2} = \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \|_2}.$$

Ensuite :

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|_2} = \frac{\lambda_1}{\|\lambda_1\|_2} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \|_2} \frac{\| \sum_{i=1}^n \eta_i e_i \|_2}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i \|_2}$$

Si on note, $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \pm 1$ le signe de λ_1, on peut donc écrire après simplification :

$$y_1 = \operatorname{sgn}(\lambda_1) \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) e_i \|_2}.$$

Montrons par récurrence sur $k > 0$ les égalités suivantes :

$$x_k = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^{k-1} \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k-1} e_i \|_2} \ , \ y_k = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \|_2}.$$

Initialisation. On a montré qu'elles étaient vraies pour $k = 1$.
Hérédité. On les suppose vraies pour k, on a alors :

$$x_{k+1} = Sy_k = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k S e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \|_2} = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k e_i \|_2}.$$

Il suit, après simplification des dénominateurs :

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \frac{\operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \lambda_1 \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{\| \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \lambda_1 \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i \|_2} \\ &= \operatorname{sgn}(\lambda_1)^k \frac{\lambda_1}{|\lambda_1|} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i \|_2} \\ &= \operatorname{sgn}(\lambda_1)^{k+1} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{k+1} e_i \|_2}. \end{aligned}$$

Donc, les deux suites sont bien définies puisque les dénominateurs sont des normes de vecteurs non nuls (puisque leur coordonnée en e_1 est non nulle). De plus, on a :

$$y_{2k} = \operatorname{sgn}(\lambda_1)^{2k} \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k} e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k} e_i \|_2} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k} e_i}{\| \sum_{i=1}^n \eta_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k} e_i \|_2}.$$

Or, par hypothèse, on a $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ pour tout $i > 1$, c'est à dire, $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ pour tout $i > 1$. Donc $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^k = 0$ pour $i > 1$. Ceci implique :

$$\lim_{k\to\infty} y_{2k} = \frac{\eta_1 e_1}{\|\eta_1 e_1\|_2} = \frac{\eta_1}{|\eta_1|} e_1 = \operatorname{sgn}(\eta_1) e_1.$$

Donc, on a montré que y_{2k} tend vers e_1 ou $-e_1$ selon le signe de η_1.

2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui ne s'annule pas sur e_1. Montrons que $\frac{\varphi(Sy_{2k})}{\varphi(y_{2k})}$ est définie à partir d'un certain rang k et tend vers λ_1.
Tout d'abord, puisque φ ne s'annule sur e_1, alors φ n'est pas la forme linéaire nulle. Donc, $\operatorname{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan. On note A son complémentaire, défini comme l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^n$ tels que $\varphi(u) \neq 0$. Alors A est un ouvert pour la topologie usuelle puisque l'on travaille dans un espace vectoriel de dimension finie. De plus, on sait par hypothèse que $\pm e_1$ est dans A. Or, on vient de montrer que y_{2k} tend vers e_1 ou $-e_1$, donc il existe un rang k, à partir duquel y_{2k} est dans A (car A est ouvert). Puisque l'on est en dimension finie, φ et S sont donc continues. Cela implique que :

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \varphi(Sy_{2k}) = \varphi\left(S \lim_{k\to\infty} y_{2k}\right) &= \operatorname{sgn}(\eta_1)\varphi(Se_1)\\ &= \operatorname{sgn}(\eta_1)\varphi(\lambda_1 e_1) = \lambda_1 \operatorname{sgn}(\eta_1)\varphi(e_1)\end{aligned}$$

et de même :

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(y_{2k}) = \operatorname{sgn}(\eta_1)\varphi(e_1).$$

On peut alors conclure que :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(Sy_{2k})}{\varphi(y_{2k})} = \frac{\lambda_1 \operatorname{sgn}(\eta_1)\varphi(e_1)}{\operatorname{sgn}(\eta_1)\varphi(e_1)} = \lambda_1.$$

□

Remarque.

On travaille ici avec des matrices symétriques mais la méthodes des puissances fonctionne aussi pour d'autres matrices.

Chapitre 6

Méthode de déflation

Nous garderons les mêmes notations que précédemment. On cherche à présent un algorithme permettant de trouver tous les vecteurs propres et toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique S qui vérifie :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0.$$

6.1 Première approche : cas n=2.

Soit une matrice symétrique S de taille 2×2 définie comme $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. On note λ_1 et λ_2 ses valeurs propres. On cherche à exprimer la condition $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ sur les coefficients a, b, c. Dans un premier temps, on peut remarquer que cette condition est équivalente à la condition $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$ avec $\lambda_i \neq 0$. Ensuite, on note P_s le polynôme caractéristique de S c'est à dire

$$P_S(X) := \det(S - X\,\mathrm{I}_2) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ b & c - X \end{vmatrix} = (a - X)(c - X) - b^2 = ac - b^2 - (a + c)X + X^2.$$

Autrement dit, $P_S(X) = X^2 - tX + d$ avec $t = a + c$ et $d = \det S = ac - b^2$.
De plus, la condition $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ signifie que S est inversible, autrement dit, $d \neq 0$. Intéressons nous maintenant à la condition $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$. Soit Q_S le polynôme unitaire de degré 2 qui a λ_1^2 et λ_2^2 comme racines. On a donc $Q_S(X) = (X - \lambda_1^2)(X - \lambda_2^2) = X^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)X + \lambda_1^2\lambda_2^2$. Or, $\lambda_1 + \lambda_2 = a + c = t$ et $\lambda_1\lambda_2 = \det S = d$. On en déduit

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = t^2 - 2d \ , \ \lambda_1^2\lambda_2^2 = d^2.$$

Donc,

$$Q_S(X) = X^2 - (t^2 - 2d)X + d^2.$$

Ses deux racines sont distinctes si et seulement si son discriminant est non nul. Si on note Δ son discriminant, on a $\Delta = (t^2 - 2d)^2 - 4d^2 = t^4 - 4dt^2 = t^2(t^2 - 4d)$. Pour résumer ce qu'on a dit, (et puisque $t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$), ce que l'on cherche c'est $dt(t^2 - 4d) \neq 0$ et si on revient aux coefficients de S, on obtient la condition que ce réel $(ac-b^2)(a+c)((a+c)^2-4ac+4b^2) = (ac-b^2)(a+c)\big((a - c)^2 + 4b^2\big)$ ne doit pas être nul. Si maintenant on note f l'application de $\mathscr{S}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $S \mapsto (ac - b^2)(a + c)\big((a - c)^2 + 4b^2\big)$, alors f est continue. De plus, le domaine considéré est l'image réciproque de $\mathbb{R}_+^*$ (qui est clairement ouvert) donc la condition cherchée représente un ouvert.

Conclusion. La condition $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ est une condition ouverte dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$, équivalente à

$$(ac - b^2)(a + c)\left((a - c)^2 + 4b^2\right) \neq 0.$$

6.2 Élaboration d'un algorithme de calcul de valeurs propres.

Proposition 6 *Pour tout k allant de 1 à $n-1$ on pose $T(k) = S - \lambda_1(e_1\,{}^te_1) - \cdots - \lambda_k(e_k\,{}^te_k)$. Alors $T(k)$ est une matrice symétrique, (e_i) est une base de vecteurs propres et les valeurs propres ordonnées sont $\lambda_{k+1} > \cdots > \lambda_n$ et la valeur propre 0 dont la multiplicité est $m_0 = k$.*

Démonstration. Tout d'abord, si u est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ (dimension $n \times 1$) alors ${}^tu$ est de dimension $1 \times n$ et donc $u{}^tu$ est une matrice carrée de taille n qui de plus, est symétrique. Donc $T(k)$ est une somme de matrices symétriques autrement dit une matrice symétrique. De plus, on sait que (e_i) est une base orthonormée donc pour $1 \leq i, j \leq n-1$ on a ${}^te_ie_j = \delta_{ij}$ avec δ_{ij} le symbole de Kroenecker (c'est à dire $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$). De ceci on déduit que si $i \leq k$ alors

$$\begin{aligned}
T(k)e_i &= Se_i - \lambda_1(e_1\,{}^te_1)e_i - \cdots - \lambda_k(e_k\,{}^te_k)e_i \quad \text{or par associativité, on a :}\\
&= Se_i - \lambda_1 e_1({}^te_1e_i) - \cdots - \lambda_k e_k({}^te_ke_i)\\
&= Se_i - \lambda_1 e_1\delta_{1i} - \cdots - \lambda_k e_k\delta_{ki}\\
&= Se_i - \lambda_i e_i\\
&= 0 \quad \text{car } e_i \text{ est vecteur propre de S associé à la valeur propre } \lambda_i.
\end{aligned}$$

Si maintenant on prend $k+1 \leq i \leq n$. On a alors :

$$\begin{aligned}
T(k)e_i &= Se_i - \lambda_1 e_1\delta_{1i} - \cdots - \lambda_k e_k\delta_{ki}\\
&= Se_i\\
&= \lambda_i e_i.
\end{aligned}$$

Pour résumer, on a :

$$T(k)e_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ \lambda_i e_i & \text{si } k+1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

Autrement dit, les valeurs propres de $T(k)$ sont : 0 de multiplicité $m_0 = k$m et les λ_i avec $i \geq k+1$ donc cela montre la proposition.

□

Proposition 7 *Soit $(S_m)_m$ une suite de matrice symétrique qui converge vers S.*

1. *On note $\lambda_{1,m}$ la plus grande valeur propre de S_m, en valeur absolue. Alors $(\lambda_{1,m})_m$ converge vers λ_1.*
2. *On choisit pour tout m, un vecteur propre normé $e_{1,k}$ pour la valeur propre $\lambda_{1,k}$ de S_m. Alors, la suite des matrices $(e_{1,m}\,{}^te_{1,m})_m$*

Démonstration. **1.** Soit N_2 la norme matricielle subordonnée à la norme quadratique de $\mathbb{R}^n$. Puisque λ_1 est la plus grande valeur propre, en valeur absolue, on sait que $N_2(S) = |\lambda_1|$. Par continuité de la norme, et puisque S_m converge vers S alors $N_2(S_m)$ converge vers $N_2(S) = |\lambda_1|$. On peut donc dire que $|\lambda_{1,m}|$ converge et tend vers $|\lambda_1|$. Ainsi, on a vu que la suite est bornée, il reste à montrer que toute sous-suite converge vers λ_1. Soit $\left(\lambda_{1,m_p}\right)_p$ une sous-suite qui converge vers un réel μ. D'après ce que l'on vient de dire, il est évident que $|\mu| = |\lambda_1|$. De plus, on sait que la suite des polynômes caractéristiques P_{S_m} tend vers P_S. Donc $P_{S_{m_p}}(\lambda_{1,m_p})$, qui est par construction une suite nulle, tend vers $P_S(\mu)$ (en utilisant la continuité des polynômes). On en déduit que μ est une racine de P_S. Or, par hypothèse de départ, la seule racine de P_S de valeur absolue λ_1 est λ_1. Donc $\mu = \lambda_1$ et ceci achève la première assertion.

2. Le fait que $e_{1,m}$ soit normé assure que la suite $\left(e_{1,m}\right)_m$ soit dans un compact de $\mathbb{R}^n$. Si l'on montre que toute suite convergente tend vers e_1 ou $-e_1$ alors on aura montré que la suite de matrice $\left(e_{1,m}\,{}^t e_{1,m}\right)_m$ tend bien vers $(e_1\,{}^t e_1)$.

Soit $(e_{1,m_p})_p$ une sous-suite qui converge vers un vecteur f de $\mathbb{R}^n$, forcément de norme égale à 1. On a l'égalité suivante, $S_{m_p} e_{1,m_p} = \lambda_{1,m_p} e_{1,m_p}$, valable pour tout p. Or d'après **1.**, cela implique $Sf = \lambda_1 f$. Donc on a bien $f = e_1$ ou $f = -e_1$.

$\square$

Conclusion. *Proposition d'un algorithme de calcul de la k-ième valeur propre λ_k de S, et un vecteur propre normé associé que l'on peut noter e_k.*

Pour commencer, on calcule une valeur approchée $\tilde{\lambda}_1$ de λ_1, et un vecteur $\tilde{e}_1$ proche de e_1 avec la méthode des puissances détaillée précédemment (chapitre **5**). On calcule ensuite la matrice symétrique $S(1) := S - \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_1\,{}^t(\tilde{e}_1)$. On peut alors réutiliser ce même algorithme pour calculer une valeur approchée de la plus grande valeur propre (en valeur absolue) de $S(1)$. On note cette valeur $\tilde{\lambda}_2$. D'aprés ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, $\tilde{\lambda}_2$ peut se rapprocher autant que l'on veut de la plus grande valeur propre (en valeur absolue) de la matrice symétrique $T(1)$; on a vu que cette valeur est λ_2. De même, on peut approcher un vecteur propre normé e_2 associé à la valeur propre λ_2 de S par le vecteur $\tilde{\lambda}_2$. On calcule ensuite $S(2) := S - \tilde{\lambda}_1 \tilde{e}_1\,{}^t(\tilde{e}_1) - \tilde{\lambda}_2 \tilde{e}_2\,{}^t(\tilde{e}_2)$ et ainsi de suite en calculant les valeurs approchées des valeurs propres une par une et pour chaque, une valeur approchée d'un vecteur propre associé à la valeur propre en question.

Remarque

Cette méthode de calcul des valeurs propres est rendue nécessaire par le fait que l'on sait en théorie que S possède n valeurs propres, mais le calcul est loin d'être évident car la recherche des racines d'un polynôme de degré n peut s'avérer assez compliquée. De plus, comme on l'a expliqué dans nos motivations, le calcul de valeurs propres approchées (avec la méthode QR par exemple) peut empêcher en pratique de calculer les vecteurs propres associés.

Chapitre 7

Factorisation de Choleski

Théorème 1 *Soit M une matrice symétrique définie positive, de taille n. Alors il existe une et une seule matrice triangulaire inférieure $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux strictement positifs, et vérifiant $M = L^tL$.*

Démonstration. La matrice M définie positive peut être vue comme la matrice d'une forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique. On peut alors appliquer la méthode de Gram-Schmidt qui permet de trouver une base orthonormée avec une matrice de passage P triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs. On a alors, ${}^tPMP = I_n$ donc $M = {}^tP^{-1}P^{-1}$. Autrement dit, il suffit de poser $L =^t P^{-1}$ et l'on a bien une matrice triangulaire inférieure L (puisque P^1 est triangulaire supérieure) à coefficients diagonaux strictement positifs qui vérifie $M = L^tL$.

Montrons maintenant l'unicité de cette factorisation. Soient L_1 et L_2 deux matrices qui conviennent. On pose $L = L_2^{-1}L_1$ alors $L^tL = L_2^{-1}L_1\,{}^tL_1\,{}^tL_2^{-1} = L_2^{-1}M\,{}^tL_2^{-1} = {}^tL_2\,{}^tL_2^{-1} = \mathrm{I_n}$. Ainsi, L est orthogonale donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et son spectre dans le cercle unité. Or, on a vu que les coefficients diagonaux de L sont réels positifs. Donc, son spectre est réduit à 1. Puisque L est diagonalisable, alors $L = \mathrm{I_n}$, d'où $L_2 = L_1$.

$\square$

Chapitre 8

Factorisation QR

Proposition 8 *Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors il existe une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire supérieure R, dont les coefficients diagonaux sont réels positifs, telles que $M = QR$. Cette factorisation est unique.*

Démonstration Commençons par montrer l'unicité. Soient (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) deux couples qui conviennent, on pose ensuite $Q := Q_2^{-1}Q_1$ et $R := R_2R_1^{-1}$. Alors, $QR_1 = Q_2^{-1}Q_1R_1$ or, $Q_1R_1 = Q_2R_2$ donc $QR_1 = Q_2^{-1}Q_2R_2 = R_2$. Ainsi, $Q = R_2R_1^{-1} = R$ ce qui signifie que Q est une matrice à la fois unitaire et triangulaire supérieure à diagonale réelle positive. Puisque la matrice Q est unitaire, alors elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres λ_i sont de module 1. Or, on sait que Q peut s'écrire :

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ pour tout i. On en déduit que $\lambda_i = 1$ pour tout i. Autrement dit, puisque Q est diagonalisable, alors il existe P inversible tel que $Q = P^{-1}\,\mathrm{I_n}\,P = \mathrm{I_n}$. Donc $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$ d'où l'unicité de la décomposition QR.
Montrons à présent l'existence de cette décomposition. L'existence découle de la factorisation de Choleski. En effet, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, la matrice M^*M est hermitienne définie positive, donc admet une factorisation de Choleski R^*R, où R est triangulaire supérieure à diagonale réelle positive. En définissant $Q := MR^{-1}$, on a :

$$Q^*Q = \left(MR^{-1}\right)^* MR^{-1} = R^{-1^*}M^*MR^{-1} = R^{-1^*}R^*RR^{-1} = \mathrm{I_n}\,.$$

Donc Q est unitaire. Et enfin, on a bien $M = QR$.

$\square$

Remarque

En pratique cette méthode de construction n'est pas du tout optimale car il est possible de calculer directement Q et R, sans passer par le calcul de M^*M et la factorisation de Choleski.

Conclusion

La factorisation QR est utile par exemple pour résoudre le système $MX = Y$. On obtient en effet, $QRX = Y \Rightarrow RX = {}^tQY$ avec R qui est facile à inverser.
De plus, il existe un algorithme basé sur la décomposition QR qui permet de calculer une valeur approchée de toutes les valeurs propres d'une matrice carrée A, efficace pour bon nombre de matrices. Si l'on construit une suite de matrice $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$, avec $A_1 = A$. L'idée principale de cet algorithme consiste à faire la décomposition QR de A_j, $A_j = Q_jR_j$, puis à définir $A_{j+1} = R_jQ_j$. Cette suite telle que définie, et en partant d'une matrice A *convenable* permet de calculer les valeurs propres de A. On appelle cet algorithme *la méthode QR* et il est l'un des plus efficaces dans la recherches de valeurs propres de matrices.