Université Claude Bernard Lyon 1

LICENCE Math VI

REPRESENTATIONS DES GROUPES FINIS

EXAMEN

6 Juin 2014

Durée : 3 heures

Les questions sur les groupes et la théorie des représentations devront être rédigées avec soin. En revanche, pour ce qui est des questions sur les isométries, en particulier celles du cube, on pourra se contenter d'arguments de type contemplatif (type « on voit bien que... »), à condition qu'ils restent suffisamment convaincants.

Problème

I. Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$

On désigne par $\varepsilon : \mathfrak{S}_4 \to \{\pm 1\}$ la signature.

1. Décrire les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$ et préciser leur cardinal.
   Il n'est pas demandé de démonstration.
2. Sachant que la signature est bien un morphisme, montrer que c'est le seul morphisme non trivial de $\mathcal{S}_4$ dans $\mathbb{C}^*$.
3. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{C}^4$. On considère l'action linéaire de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathbb{C}^4$ définie par
$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_4, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad \sigma \cdot e_i = e_{\sigma(i)}.$$
   Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ pour le produit hermitien standard.
   (i) Montrer que H est une sous-représentation de $\mathbb{C}^4$. On la note ρ_{st}.
   (ii) Expliquer comment le nombre de points fixes d'un élément $\sigma \in \mathcal{S}_4$ permet de calculer le caractère de ρ_{st}. Puis, le déterminer sur chaque classe de conjugaison.
   (iii) Déduire que la représentation ρ_{st} est irréductible.
4. En considérant l'application
$$\mathfrak{S}_4 \to \mathrm{GL}(H), \quad \sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)\rho_{\mathrm{st}}(\sigma),$$
   obtenir une représentation irréductible de degré 3. On montrera qu'il s'agit bien d'un morphisme et qu'il définit une représentation non isomorphe à ρ_{st}.
5. Compléter la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$.

II. Le groupe Γ des rotations du cube

On considère un cube $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$ de centre O et de sommets A, B, C, D, E, F, G, H. Pour fixer les idées, on pourra supposer qu'il s'agit des points de coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. On désigne par $\Delta_1 = AH, \Delta_2 = GC, \Delta_3 = ED, \Delta_4 = BF$ les quatre grandes diagonales de $\mathcal{C}$.

Soit Γ l'ensemble des rotations de $\mathbb{R}^3$ qui préservent $\mathcal{C}$. On sait que Γ est composé de 24 éléments répartis en l'identité, 6 rotations d'angle π autour des 6 droites passant les milieux d'arêtes opposées, 8 rotations d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour des 4 droites passant par les sommets opposés, 9 rotations, d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ et π, autour des 3 droites passant par les centres des faces opposées.

1. Démontrer que Γ est un groupe pour la composition.
2. Démontrer que tout élément g de Γ induit une permutation ψ_g des grandes diagonales de $\mathcal{C}$.
   On pourra énoncer sans avoir à le démontrer qu'une grande diagonale est la distance maximale entre deux points du cube.

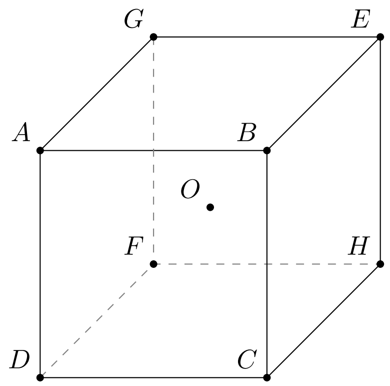

Figure 1 – Le cube

3. En déduire un morphisme de groupes
$$\psi : \Gamma \to \mathfrak{S}_4, \quad g \mapsto \psi_g.$$
4. En considérant les rotations d'angle π autour d'une droite passant par les milieux de deux arêtes opposées (par exemple $[AB]$ et $[FH]$), démontrer que l'image $\psi(\Gamma)$ de ψ contient toutes les transpositions de $\mathfrak{S}_4$.
5. En déduire que ψ est un isomorphisme de Γ dans $\mathfrak{S}_4$.

Dans la suite, on pourra utiliser sans démonstration que les éléments de Γ se répartissent en cinq classes de conjugaison :

- $\mathrm{C}_1 = \{$identité$\}$,
- $\mathrm{C}_2 = \{$les six rotations d'angle π autour d'un axe passant par les milieux de deux arêtes opposées$\}$, ($\to$ les deux-cycles)
- $\mathrm{C}_3 = \{$les huit rotations d'angle $\pm 2\pi/3$ autour des diagonales$\}$, ($\to$ les 3-cycles)
- $\mathrm{C}_4 = \{$les six rotations d'angle $\pm\pi/2$ autour des axes passant par les milieux de deux faces opposées$\}$, ($\to$ les 4-cycles).
- $\mathrm{C}_5 = \{$les trois rotations d'angle π autour d'un axe passant par les milieux de deux faces opposées$\}$, ($\to$ les produits de deux transpositions disjointes)

III. Étude d'une représentation de Γ

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des 6 faces de $\mathcal{C}$ et soit $V = \mathbb{C}[\mathcal{F}]$ un espace vectoriel de base δ_F, $F \in \mathcal{F}$. Il est clair que Γ agit linéairement sur V par $g.\delta_{\mathrm{F}} = \delta_{g(\mathrm{F})}$, où $g(\mathrm{F})$ désigne la face image de la face F par la rotation g. On définit donc une représentation ρ de caractère χ.

1. Montrer que le caractère χ pour chaque classe de conjugaison C_i de Γ, $1 \leq i \leq 5$, est donné par $(6, 0, 0, 2, 2)$.
2. Calculer la norme du caractère χ. Expliquer pourquoi ρ est somme directe de trois représentations irréductibles non isomorphes.
3. Trouver ces trois caractères irréductibles, dans la table du I, qui décomposent le caractère χ.
Pour gagner du temps, devinez d'abord quelles sont les dimensions des représentations irréductibles.

IV. Étude de la représentation duale

Soit V^* le dual de l'espace V muni de la représentation duale ρ^* de caractère χ^*. On munit V^* de la base duale $(\delta_F^*)_{F\in\mathcal{F}}$ et on assimile V^* à l'espace des fonctions de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{C}$ par $\delta_F^*(F') = \delta_{F,F'}$ (symbole de Kronecker). On a donc pour toute fonction f sur les faces et toute rotation g,
$$g.f(F) = f\big(g^{-1}(F)\big).$$

1. Donner χ^*, puis, montrer que V et V^* sont isomorphes.

Soit ι la symétrie de centre O. Une fonction $f \in V^*$ est dite *paire* (resp. *impaire*) si
$$\forall F \in \mathcal{F}, \quad f(\iota(F)) = f(F) \quad (\text{resp. } f(\iota(F)) = -f(F)).$$
On désigne par V_+^* (resp. V_-^*) le sous-espace de V formé des fonctions paires (resp. impaires).

2. Soit F et F' deux faces distinctes. Soit τ dans Γ qui envoie F sur F'. Que vaut $\tau.f(F')$, pour f quelconque dans V^* ?
3. Montrer que le sous-espace ${V^*}^\Gamma$ des invariants de Γ est formé des fonctions constantes. En déduire que ${V^*}^\Gamma$ est une sous-représentation de V^*_+.
4. Soit π_Γ la projection Γ-invariante de V^* sur ${V^*}^\Gamma$. Décrire l'image $\pi_\Gamma(f)$ d'une fonction f par π_Γ.
   On pourra par exemple montrer que la forme hermitienne canonique est Γ-invariante, puis que π_Γ est la projection orthogonale sur ${V^*}^\Gamma$.
5. Démontrer que V^*_+ et V^*_- sont deux sous-représentations de V^*. Combien de composantes irréductibles possèdent-elles ?

V. Joue avec les dés !

Numérotons *arbitrairement* les faces de $\mathcal{C}$ de 1 à 6. Le jeu consiste à remplacer chaque nombre par la moyenne des quatre nombres figurant sur les quatre faces adjacentes, puis à répéter cette opération. On se demande ce qu'il se passe après un grand nombre d'itérations.

Soit u l'endomorphisme de V^* défini par

$$\forall f \in V^*, \quad \forall F \in \mathcal{F}, \quad u(f)(F) = \frac{1}{4} \sum_{F'} f(F'),$$

où F' parcourt l'ensemble des faces de $\mathcal{C}$ adjacentes à F. Un état du cube est décrit par une fonction f et notre jeu consiste remplacer f par $u(f)$.

1. Justifier que u commute à l'action de Γ.
   On demande juste une phrase persuasive et bien sentie.
2. Soit $V^* = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ la décomposition de V^* en représentations irréductibles. Montrer que $u(W_i)$ est une sous-représentation de V^*, soit nulle, soit irréductible.
3. Démontrer que u stabilise tous les W_i et induit sur chacun une homothétie.
4. Déterminer les trois rapports d'homothétie.
5. On munit V^* de la forme hermitienne sur V^* telle que $(\delta^*_F)_{F\in\mathcal{F}}$ soit unitaire. Montrer que cette forme est Γ-invariante et déduire qu'il existe une base unitaire dans laquelle la matrice de u soit diagonale de la forme $\mathrm{diag}(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$.
6. Déduire de ce qui précède que l'itération de notre jeu tend à attribuer à chaque face la valeur 7/2.