Université Claude Bernard Lyon 1

LICENCE Math VI

REPRESENTATIONS DES GROUPES FINIS

PARTIEL

4 Avril 2014

Durée : 2 heures

Exercice 1 — On considère l'espace $\mathbb{C}^4$ muni de la forme hermitienne canonique donnée par

$$\big((x_i),(y_j)\big) = \sum_{i=1}^{4} \overline{x_i} y_i,\ \ x_i, y_j \in \mathbb{C}.$$

Soit $P = \{(z_i) \in \mathbb{C}^4,\ z_3 = -iz_1 + (1+i)z_2,\ z_4 = (1-i)z_1 + iz_2\}$.

1. Montrer qu'il existe une unique base de P de la forme $\big((1,0,z_3,z_4),(0,1,z'_3,z'_4)\big)$, avec z_i, z'_i dans $\mathbb{C}$ et la décrire explicitement.
2. Utiliser le procédé de Gram-Schmidt à partir de cette base pour construire une base orthonormale de P.
3. Donner l'expression de la projection orthogonale sur le plan P.

Exercice 2 — Soit $n \geq 1$ un entier et G un sous-groupe fini du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On note $(\ ,\ )$ la forme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$ et on définit la forme $(\ ,\ )_G$

$$(x,y)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \big(g(x), g(y)\big),\ \ x, y \in \mathbb{C}^n.$$

On rappelle que le groupe unitaire $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ des automorphismes u tels que $(u(x), u(y)) = (x,y)$, pour tout $x, y \in \mathbb{C}^n$.

1. Montrer que la forme $(\ ,\ )_G$ est hermitienne définie positive, puis, que pour tout h dans G, on a $\big(h(x), h(y)\big)_G = \big(x,y\big)_G$, pour tout x, y dans $\mathbb{C}^n$.
2. On munit $\mathbb{C}^n$ de sa base canonique (e_i) et on fixe une base (e'_i) unitaire pour $(\ ,\ )_G$. Soit ϕ l'automorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui envoie (e_i) sur (e'_i). Montrer que pour tout g de G, $\phi^{-1} \circ g \circ \phi \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.
3. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 3 — Soit n un entier naturel et soit $\mathbb{C}[\mathrm{X}]_n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On considère la forme

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\mathrm{P}(e^{it})}\mathrm{Q}(e^{it})\ \mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]_n$.
2. Démontrer que $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ est une base orthonormée pour cet espace hermitien.
3. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^m + a_{m-1}\mathrm{X}^{m-1} + \ldots + a_0$ un polynôme unitaire dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]_n$. On pose

$$\mathrm{M} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\mathrm{P}(e^{it})|.$$

Calculer la norme de P et en déduire la minoration

$$1 \leqslant \mathrm{M}.$$

4. Démontrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si P est un monôme.

Exercice 4 — Soit A un groupe abélien fini. On se propose de démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) A n'est pas cyclique.

(b) A contient deux sous-groupes cycliques distincts et isomorphes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, les deux sous-groupes $\langle \overline{a} \rangle$ et $\langle \overline{\mathrm{pgcd}(a,n)} \rangle$ sont égaux.
2. Soit $n \geqslant 1$ un nombre entier. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \{\text{diviseurs positifs de } n\} & \longrightarrow & \{\text{sous} - \text{groupes de } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} \\ d & \longmapsto & \langle \overline{d} \rangle \end{array}$$

est une bijection.

On pourra se servir du fait que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique.

3. Déduire de la question précédente une preuve de l'implication (b) $\Rightarrow$ (a).
Considérer la proposition contraposée.
4. En utilisant le théorème de structure des groupes abéliens finis, démontrer l'implication (a) $\Rightarrow$ (b).

Exercice 5 — Soit A un groupe abélien fini d'élément neutre e et soit a un élément de A.

1. Démontrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) $a \neq e$;
   (ii) il existe un caractère χ de A tel que $\chi(a) \neq 1$.
2. En déduire la valeur de la somme $\sum_{\chi\in\widehat{A}} \chi(a)$ en faisant deux cas.