Université Claude Bernard Lyon 1

LICENCE Math VI

REPRESENTATIONS DES GROUPES FINIS

PARTIEL

**23 Avril 2015**

Durée : 2 heures

**EXERCICE 1.** *Décomposition polaire dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$
Soit $A$ une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On veut montrer qu'il existe un unique couple $(U, H)$ tel que les conditions suivantes sont vérifiées.
$\mathbf{P}_1$ la matrice $U$ est unitaire,
$\mathbf{P}_2$ la matrice $H$ est hermitienne définie positive,
$\mathbf{P}_3$ on a l'égalité $A = UH$.
**A.** *Existence*
On montre dans cette partie qu'un tel couple existe.
Soit $(\ ,\ )$ la forme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^n$.
1) Montrer que, pour tout vecteur (colonne) non nul $X$ de $\mathbb{C}^n$, on a $(A^*AX, X) > 0$.
2) En déduire que la matrice $A^*A$ est hermitienne définie positive. Dans la suite, on notera $P$ une matrice unitaire qui diagonalise $A^*A$, *ie* $A^*A = PDP^{-1} = PDP^*$, avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$.
3) Soit $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i$ et $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$. Soit $H$ définie par $H = P\Delta P^{-1}$. Montrer que la matrice $H$ est hermitienne définie positive.
4) Soit $U$ la matrice définie par $U = AH^{-1}$. Montrer qu'elle est unitaire et en déduire l'existence du couple $(U, H)$.
**B.** *Unicité*
Dans la suite, on note toujours $H$ et $U$ les matrices définies en **A** et on note $(U', H')$ un autre couple vérifiant les propriétés $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$. On veut montrer que $U' = U$ et $H' = H$.
On rappelle que, par le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un polynôme $Q$ tel que $Q(\lambda_i) = \mu_i$, pour tout $i$ de 1 à $n$.
1) Soit $M$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $N$ une matrice de $\mathrm{GL}_n(C)$ et $Q_0$ un polynôme quelconque de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que $Q_0(NMN^{-1}) = NQ_0(M)N^{-1}$.
2) Montrer, en utilisant $\mathbf{P}_3$, que $A^*A = H'^2$.
3) Montrer, en utilisant 1) et 2), que $Q(H'^2) = H$, et en déduire que $H$ et $H'$ commutent.
4) Montrer que $H$ et $H'$ sont diagonalisables dans une base commune. On pourra noter $P_0$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers une base commune fixée.
5) En utilisant l'égalité $H'^2 = A^*A = H^2$, prouver que $H' = H$.

6) En déduire que $U' = U$.

**EXERCICE 2.** Rappeler le théorème de structure des groupes abéliens finis (version complète : existence et unicité). Montrer ensuite que deux groupes abéliens finis d'ordre 105 sont isomorphes.

**EXERCICE 3.**
Soit $G$ un groupe abélien fini et $\widehat{G}$ son groupe dual. Les formes hermitiennes habituelles sur $\mathbb{C}[G]$ et $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ seront notées respectivement $(\ ,\ )_G$ et $(\ ,\ )_{\widehat{G}}$.
1) Pour $k$ dans $G$ et $f$ dans $\mathbb{C}[G]$, on définit la fonction $k \perp f \in \mathbb{C}[G]$ par

$$k \perp f : G \to \mathbb{C},\ s \mapsto f(s-k)$$

Montrer que l'on définit une action de $G$ sur $\mathbb{C}[G]$ par $(k, f) \mapsto k \perp f$.
Montrer que l'action respecte la forme $(\ ,\ )_G$, c'est-à-dire

$$(k \perp f, k \perp g)_G = (f, g)_G,\ \forall k \in G,\ f, g \in \mathbb{C}[G].$$

On admet que l'on a de même une action de $G$ sur $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ par, $k \in G$, $\phi \in \mathbb{C}[\widehat{G}]$, $k \top \chi \in \mathbb{C}[\widehat{G}]$ :

$$k \top \phi \in \mathbb{C}[\widehat{G}] : \widehat{G} \to \mathbb{C},\ \chi \mapsto \chi(k)\phi(\chi).$$

2) Soit $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier de $\mathbb{C}[G]$ dans $\mathbb{C}[\widehat{G}]$. Montrer que, pour tout $f$ de $\mathbb{C}[G]$, et $k$ de $G$ on a

$$\mathcal{F}(k \perp f) = k \top \mathcal{F}(f).$$

3) On fixe $f$ dans $\mathbb{C}[G]$. Déduire de 2) que si $(k \perp f)_{k \in G}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}[G]$, alors $(k \top \mathcal{F}(f))_{k \in G}$ est une base orthogonale de $\mathbb{C}[\widehat{G}]$.
4) On pose $\tilde{f}(s) = \overline{f(-s)}$, $s \in G$. Montrer que $(k \perp f)_{k \in G}$ est une base unitaire si et seulement si $\frac{1}{n} f * \tilde{f} = \delta_0$, où $\delta_0$ est la fonction de $\mathbb{C}[G]$ telle que $\delta_0(k) = \delta_{0k}$, et où $*$ désigne la convolution.
5) Montrer alors que $(k \perp f)_{k \in G}$ est une base unitaire de $\mathbb{C}[G]$ si et seulement si $|\mathcal{F}(f)(\chi)| = 1$ pour tout $\chi$ de $\widehat{G}$.