Algèbre, Master 1 **5 novembre 2018**
2018–2019

Examen partiel d'Algèbre

Durée 2 heures

LES DOCUMENTS NE SONT PAS AUTORISÉS

Questions du cours

1. Formuler le théorème fondamental pour les groupes abéliens finis.
2. Formuler le théorème principal pour l'anneau des polynômes symétriques en n variables.

Problème 1 On se propose de montrer que le polynôme

$$P = X^9 + 3X^8 + 5X^3 - 3X^2 + 3X + 17$$

est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que si P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, alors, il l'est dans $\mathbb{Q}[X]$.
2. Pour tout nombre premier p et tout polynôme Q de $\mathbb{Z}[X]$, on note $\overline{Q}_p$ le polynôme de $\mathbb{F}_p$ dont les coefficients sont les résidus modulo p des coefficients de Q. Montrer que $Q \mapsto \overline{Q}_p$ définit un morphisme d'anneaux entre $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{F}_p[X]$. En déduire que si Q est un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $\overline{Q}_p$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$, alors Q l'est dans $\mathbb{Z}[X]$.
3. Montrer que $X^3 - X - 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$ et déduire que la décomposition de $\overline{P}_3$ en irréductibles sur $\mathbb{F}_3$ est $(X^3 - X - 1)^3$.
4. Montrer que le polynôme $X^4 + X + 1$ de $\mathbb{F}_2[X]$ ne possède pas de racine dans $\mathbb{F}_4$ et déduire que la décomposition de $\overline{P}_2$ en irréductibles sur $\mathbb{F}_2$ est $(X+1)(X^4+X+1)^2$.
5. Conclure, par une considération de degrés, que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Problème 2 On désigne par G le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (pour l'addition).

1. Montrer que G est un groupe de torsion, *i.e.* que chaque élément de G est d'ordre fini.
2. Montrer que si p et q sont deux entiers premiers entre eux, le sous-groupe de G engendré par la classe de $\frac{p}{q}$ est égal au sous-groupe engendré par la classe de $\frac{1}{q}$. En déduire que, pour chaque entier $n \geq 1$, il existe un unique sous-groupe cyclique de G d'ordre n.
3. En utilisant le fait que $\mathbb{Z}$ est principal, montrer qu'un sous-groupe de G engendré par deux éléments de G est cyclique. Puis, déduire que chaque sous-groupe de G de type fini, *i.e.* engendré par un nombre fini de générateurs, est cyclique. Pour $n \geq 1$, combien y a-t-il de sous-groupes d'ordre n dans G ? Justifiez votre réponse.
4. Donnez un exemple d'un sous-groupe de G qui est à la fois infini et *propre*, *i.e.* différent de G. On pourra considérer un sous-groupe tel que l'ordre de chaque élément est une puissance de p, avec p premier.

5. Montrer que si H est un sous-groupe infini et propre de G alors le groupe quotient G/H est infini. (Indication : que peut-on dire d'un sous-groupe de G qui, pour tout p premier et $n \in \mathbb{N}$, contient un élément d'ordre p^n ?)

Problème 3 Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$. L'anneau $A = k[X_1, \cdots, X_n]$, $n > 1$, est muni de l'action naturelle du groupe symétrique S_n par permutation des variables. On dit qu'un polynôme $P \in A$ est *antisymétrique* si pour tout $\sigma \in S_n$, on a $\sigma P = \varepsilon(\sigma)P$, où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de σ. Soit

$$\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j).$$

1. Montrer que Δ est antisymétrique.
2. Pour $P \in A$, montrer qu'il existe $Q \in A$ et $R \in k[X_2, \cdots, X_n]$ uniques, tels que

$$P = Q \cdot (X_1 - X_2) + R.$$

3. Supposons que $P \in A$ soit antisymétrique.
   (a) Montrer que le polynôme R ci-dessus est égal à 0.
   (b) En déduire que $P = \Delta \cdot S$ où S est un polynôme symétrique dans A.