Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1

Groupes Classiques et Géométrie

Correction du partiel- Avril 2019

Exercice 1 (Structures complexes). 1. $\det(-\mathrm{I}_N) = (-1)^N$. Donc, s'il existe J dans $\mathscr{C}_N$, on a $\det(J)^2 = \det(J^2) = (-1)^N$, et donc N est pair puisque c'est le carré d'un réel.

2. (a) $\lambda(U + V) = \lambda U + \lambda V$ provient de la distributivité de la multiplication matricielle sur l'addition des vecteurs.

   $(\lambda + \mu)U = \lambda U + \mu U$ provient de la distributivité de la multiplication des vecteurs sur l'addition des matrices.

   $\lambda(\mu U) = (\lambda\mu)U$ est plus subtil. Ecrivons $\lambda = a + bi$ et $\mu = c + di$, avec a, b, c, d réels. Le membre de gauche vaut alors

   $$\lambda(cU + dJU) = acU + adJU + bcJU + bdJ^2U = (ac - bd)U + (bc + ad)JU.$$

   Et le membre de droite vaut

   $$(a + bi)(c + di)U = (ac - bd)U + (bc + ad)JU.$$

   On constate d'égalité.

   (b) Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et que la structure de $\mathbb{C}$-espace que l'on vient de construire prolonge celle de $\mathbb{R}$, toute famille $\mathbb{R}$-géneratrice est forcément $\mathbb{C}$-génératrice. Le $\mathbb{C}$-espace est ainsi de dimension finie, et donc, possède une base.

   (c) La famille $(v_1, Jv_1, v_2, Jv_2, \ldots, v_p, Jv_p)$ est $\mathbb{R}$-libre, puisque si les réels a_k, b_k vérifient $\sum_k(a_kv_k+ b_kJv_k)$, il vient par construction que $\sum_k(a_k + b_ki)v_k$ et donc $a_k + b_ki = 0$ puisque les v_k forment une $\mathbb{C}$-base. Donc, $a_k = b_k = 0$ pour tout k.

   La famille $(v_1, Jv_1, v_2, Jv_2, \ldots, v_p, Jv_p)$ est également génératrice, car tout vecteur s'écrit $v = \sum_k(a_k + b_ki)v_k$, pour des a_k, b_k réels (puisque les v_k forment une $\mathbb{C}$-base). Et donc $v = \sum_k(a_kv_k + b_kJv_k)$.

   (d) On vient de construire une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^{2n}$ de cardinal $2p$, donc $2p = 2n$ et $p = n$.

   (e) On voit facilement que dans la $\mathbb{R}$-base $(v_1, Jv_1, v_2, Jv_2, \ldots, v_p, Jv_p)$, l'endomorphisme canoniquement associé à J s'écrit comme dans l'énoncé.

3. (a) On sait que l'on a bien une action de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des matrices. Montrons que cette action stabilise $\mathscr{C}_{2n}$. En effet, si $J \in \mathscr{C}_{2n}$ et $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$, on a $(PJP^{-1})^2 = PJ^2P^{-1} = -P\mathrm{I}_{2n}P^{-1} = -\mathrm{I}_{2n}$. Ceci prouve bien la stabilité voulue.

   (b) On a montré ci-dessus que toute matrice J de $\mathscr{C}_{2n}$ est semblable à J_{2n}. Il n'y a donc qu'une seule orbite pour cette action.

4. (a) Le stabilisateur de J_2 pour l'action de conjugaison est le commutant de J_2 dans GL_2. La condition pour que la matrice proposée commute à J_2 est

   $$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix},$$

   et donc, la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec a, b réels. Réciproquement, il faut que cette matrice soit bien dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire inversible. Ceci implique $a^2 + b^2 \neq 0$, et donc a, b non nuls. On retrouve le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ par l'identification habituelle $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a + bi$.

(b) On écrit l'égalité $MJ_{2n} = J_{2n}M$, avec $M \in \mathrm{GL}_{2n}$ en blocs matriciels 2×2. On trouve par un calcul par blocs que chaque bloc doit commuter avec J_2 : par le cas $n = 1$, on peut identifier M à une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en identifiant chaque bloc 2×2 à un complexe.

5. C'est juste le théorème d'homéomorphisme du cours, une fois que l'on en a vérifié les hypothèses (locale compacité et dénombrabilité à l'infini).

Exercice 2. 1. **Un exemple.**

Le nombre de cases de la ligne du bas est la dimension du noyau, donc, par la formule du rang, $6 - 4 = 2$. Comme la suite des noyaux emboîtés s'essouffle, les seules possibilités de partitions associées sont $2 \geq 2 \geq 2$, $2 \geq 2 \geq 1 \geq 1$, $2 \geq 1 \geq 1 \geq 1 \geq 1$.

En dualisant la partition on tombe sur les partitions duales $3 \geq 3$, $4 \geq 2$, $5 \geq 1$. La forme normale de l'orbite, en notant J_k la matrice de Jordan de taille k, dont alors respectivement les matrices diagonales par blocs : (J_3, J_3), (J_4, J_2), (J_5, J_1). Les polynômes minimaux de N sont respectivement X^3, X^4, X^5.

2. Les noyaux $K_k := \ker(N^k)$ sont emboîtés dans le sens croissant et de plus $\dim K_k - \dim K_{k-1} \geq \dim K_{k+1} - \dim K_k$. On a par hypothèses que $\dim K_m = n$ et $\dim K_m - \dim K_{m-1} > 0$ (sinon, on aurait égalité, et X^m ne serait pas polynôme minimal de N). Par l'inégalité d'essoufflement, $\dim K_k - \dim K_{k-1} > 0$ k, $1 \leq k \leq m$. Pour $k = m + 1$, on a l'égalité.
3. On a clairement un emboîtement décroissant des images $\operatorname{im} N^k$. Par la formule du rang, $\dim \operatorname{im}(N^{k-1}) - \dim \operatorname{im}(N^k) = \dim K_k - \dim K_{k-1} > 0$. Donc, les images sont strictement emboîtées jusqu'à $\operatorname{im} N^m = 0$.
4. On a $\dim \operatorname{im}(N^{k-1}) - \dim \operatorname{im}(N^k) = \dim K_k - \dim K_{k-1} \geq 1$ et $\dim \operatorname{im} N^1 = r$. En faisant la somme de ces inégalités pour k de 1 à $m - 1$, et compte tenu que $\operatorname{im} N^m = 0$, on obtient

$$\dim \operatorname{im} N^1 - \dim \operatorname{im} N^m \geq m - 1$$

, et donc $r + 1 \geq m$. Donc, toute matrice nilpotente de rang r est annulée par X^{r+1}.
5. Comme $Q(0) \neq 0$, il vient que Q est premier avec X, donc, avec X_k. On peut alors appliquer le lemme des noyaux pour obtenir l'égalité $\mathbb{C}^n = \ker A^k \oplus \ker Q(A)$.
6. On sait que les projecteurs spectraux, sur $\ker(A^k)$ et $\ker(Q(A))$, sont des polynômes en ϕ, il en résulte que ϕ commute avec ces sous-espaces propres et donc respecte les sous-espaces $\ker(A^k)$ et $\ker(Q(A))$.

   Soit ϕ_1 la restricition de ϕ au premier sous-espace. On a $\phi_1^k = 0$, et donc, ϕ_1 est nilpotente. De plus si ϕ_2 n'était pas inversible, par l'absurde, elle aurait un noyau non trivial, donc contenant un élément non nul x tel que $x \in \ker(Q(A))$ et $x \in \ker A \subset \ker A^k$. On aurait alors un élément non nul dans l'intersection, absurde.
7. On a $\mathrm{rg}(\phi_1) + \mathrm{rg}(\phi_2) = r$, puisque $\operatorname{im}(A) = \operatorname{im} \phi_1 \oplus \operatorname{im} \phi_2$. Or,

$$\mathrm{rg}(\phi_2) = \dim \ker(Q(A))$$

puisque ϕ_2 est inversible sur ce sous-espace. On en déduit que $\mathrm{rg}(\phi_1) = r - \dim \ker(Q(A))$. Posons $s := \dim \ker(Q(A))$. D'après l'étude faite sur le cas nilpotent, il existe un polynôme P de degré $r - s + 1$ qui annule ϕ_1, et par Cayley-Hamilton, il existe un polynôme S de degré s qui annule ϕ_2. $(PS)(\phi)$ s'annule alors sur les sous-espaces $\ker(A^k)$ et $\ker(Q(A))$, et donc sur l'espace tout entier. On a trouvé un polynôme de degré $(r - s + 1) + s = r + 1$ qui annule A.