

Contrôle Continu

durée : 1h30

Les documents ne sont pas autorisés et les calculatrices sont interdites. Il est demandé de rédiger avec le plus grand soin.

EXERCICE 1.

Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une bijection. Soit $\phi : E \rightarrow E$ une application.

1. Montrer que si ϕ est injective alors $f \circ \phi \circ f^{-1}$ l'est aussi.
2. Lorsque ϕ est bijective, montrer que $f \circ \phi \circ f^{-1}$ est bijective et donner sa bijection réciproque.

EXERCICE 2.

On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
2. Déterminer l'ensemble des points où f est dérivable.
3. Calculer la dérivée de f aux points x où elle est dérivable.

EXERCICE 3.

1. Ecrire les développements limités à l'ordre 4 dans un voisinage de 0 des fonctions

$$x \mapsto (\sin x)^2 \quad \text{et} \quad x \mapsto \cos x - 1.$$

2. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - (\sin x)^2}{(\tan x)^2(1 - \cos x)}.$$

EXERCICE 4.

On considère une application $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xg(x)}{\ln x} = 0.$$

1. Ecrire la définition du cours de la proposition suivante : la fonction f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. Montrer qu'il existe a dans \mathbb{R}^+ tel que l'on ait :

$$x \geq a \Rightarrow x |g(x)| \leq \ln x.$$

3. En déduire que g possède une limite quand x tend vers $+\infty$ et préciser cette limite.