Université Claude Bernard Lyon I

Licence "Sciences et technologie"

Première année

Unité d'enseignement Math I

Correction de l'epreuve de mathématiques

Session de JANVIER 2005

5 janvier 2005 – durée : 2 heures

---

gnificatif.

Exercice 1

1. Utilisons un DL pour etudier $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$ dans un voisinage de zero.

$$f(x) = \ln(1 + x + x\epsilon(x)) = x + x\epsilon(x),$$

ou ϵ est une fonction de limite nulle en zero. Donc, $f(x)$ est equivalente a x en zero.

2.

$$\lim_{x\to 0}(\cos x + \sin x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\cos x+\sin x)}$$

Or, d'apres ce qui precede $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln(\cos x+\sin x) = 1$. Il en resulte que $\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{1/x} = e^1 = e$.

Exercice 2

1. On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\epsilon(x)$, ou ϵ est une fonction de limite nulle en zero.
2. On en deduit que $(1+x)^{1/x}$ =exp($\frac{1}{x}\ln(1+x)$) =exp($1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3\epsilon(x)$). D'ou par composition de DL,

$$(1+x)^{1/x} = e(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2}(\frac{x^2}{4} - 2\frac{x^3}{6}) - \frac{1}{6}\frac{x^3}{8} + x^3\epsilon(x)),$$

$$(1+x)^{1/x} = e(1 - \frac{x}{2} + 11\frac{x^2}{24} - 7\frac{x^3}{16} + x^3\epsilon(x)).$$

3. $\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x\cos x}$ est donc equivalent en zero a $-\frac{ex}{2x} = -e/2$. D'ou

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x\cos x} = -e/2.$$

.

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{f(x)}$$
pour une fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=c\neq 0$. D'apres le theoreme de Taylor-Young, $f(x)$ est equivalente a cx en zero. Donc $\frac{(1+x)^{1/x}-e}{f(x)}$ est equivalente a $-\frac{ex}{2cx}=-\frac{e}{2c}$.
D'ou
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{f(x)}=-\frac{e}{2c}$$

Exercice 3

1. Afin de calculer le PGCD de 588 et 273, on utilise l'algorithme d'Euclide.
$$588 = 2\times 273+42,$$
$$273 = 6\times 42+21,$$
$$42 = 2\times 21+0.$$
Donc le PGCD de 588 et 273 est 21.
2. Cherchons l'identite de Bezout associe a ce PGCD.
$$21 = 273-6\times 42 = 273-6\times(588-2\times 273) = -6\times 588+13\times 273.$$
Il en resulte que
$$-12\times 588+26\times 273 = 42.$$
Un couple (u,v) cherche est $(-12,26)$.
3. Un couple $(s,t)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tel que $588s+273t=7$ n'existe pas car 21 divise $588s+273t$ (puisqu'il divise 588 et 273), or il ne divise pas 7.

Exercice 4 Soit $(G,\cdot)$ un groupe commutatif. Soient a et b deux éléments de G d'ordre respectif n et m. On notera e l'élément neutre de G.

1. Calculer $(a\cdot b)^{nm}$. Comme G est commutatif, on a
$$(ab)^{nm} = a^{nm}b^{nm} = (a^n)^m(b^m)^n = e^m e^n = e.$$
2. Montrer que l'ordre de $a\cdot b$ divise nm *(on effectuera une division euclidienne).* Rappelons que l'ordre s de ab est le plus petit entier strictement positif tel que $(ab)^s=e$. Effectuons la division euclidienne de nm par s. On obtient
$$nm = sq+r,\ \ 0\leq r<s.$$
On a donc
$$(ab)^r = (ab)^{nm-sq} = (ab)^{nm}((ab)^s)^{-q} = e.e^{-q} = e.$$
Par minimalite de s, il vient $s=0$. Donc, l'ordre s de ab divise nm.
3. Soit H l'ensemble constitué des éléments d'ordre fini de G. Montrer que H est un sous-groupe de G.
Premier point. e est d'ordre fini 1, donc H contient e. Il est non vide.
Second point. Il faut montrer que si a et b sont dans H alors ab^{-1} est dans H. Supposons donc que a et b sont dans H, alors b^{-1} a un ordre fini (egal a l'ordre de b). Par ce qui precede, ab^{-1} a un ordre fini. Donc ab^{-1} est dans H.

Exercice 5

1. Donner la définition d'un morphisme de groupes de $(G, *)$ vers $(H, .)$. Un morphisme de groupes ϕ de $(G, *)$ vers $(H, .)$ est une application de G vers H verifiant pour tout x, y dans G :
$$\phi(x * y) = \phi(x).\phi(y).$$

2. Donner la table de multiplication de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et en déduire l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ inversibles pour la multiplication. $0.x = 0$ et $1.x = x$. Pour le reste, on a $2.2 = 4$, $2.3 = 0$, $2.4 = 2$, $2.5 = 4$, $3.3 = 3$, $3.4 = 0$, $3.5 = 3$, $4.4 = 4$, $4.5 = 2$, $5.5 = 1$. Les seuls elements inversibles sont donc 1 et 5 et leur inverse est respectivement 1 et 5.