

Licence “Mathématiques et informatique”

Première année

Unité d’enseignement Math II-ALGEBRE

Epreuve de mathématiques

Partiel

20 Avril 2006 – durée : 1 heures 30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l’ordre de votre choix. L’utilisation de documents de toute nature et de calculettes n’est pas autorisée. La qualité de la rédaction est un élément d’appréciation significatif.

Exercice 1

A. L’espace vectoriel \mathbb{R}^3 est muni de sa base canonique $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$. On considère l’endomorphisme ϕ de \mathbb{R}^3 donnée par

$$\phi(e_1) = e_1, \phi(e_2) = e_1 + 2e_2, \phi(e_3) = -e_1 + e_2 + 3e_3.$$

- 1) Soit A la matrice de ϕ dans la base \mathcal{B} . Explicitez la matrice A .
- 2) On considère la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ donnée par

$$e'_1 = e_1, e'_2 = e_1 + e_2, e'_3 = e_2 + e_3.$$

Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .

- 3) Donner la matrice de passage P de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' . Calculer son inverse P^{-1} .
- 4) Donner la matrice de l’endomorphisme ϕ dans la base \mathcal{B}' .

B. Soit B la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Trouver une relation de liaison entre les colonnes de B .
- 2) La matrice B est elle inversible?
- 3) Donner le rang de B (on pourra se servir de A 3)).

Exercice 2

- 1) Montrer que le reste de la division euclidienne de X^n par $X - 1$ est 1.
- 2) En déduire le reste de la division euclidienne de X^{6n} par $X^6 - 1$.

Exercice 3

- 1) Factoriser le polynôme $X^6 - 1$ sur \mathbb{C} .
- 2) En déduire une factorisation du polynôme $X^6 - 1$ sur \mathbb{R} .
- 3) Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X^6 - 1}.$$