Mathématiques - Asinsa 2

Année 2005/2006 - semestre 2

DEVOIR SURVEILLE – Durée : 3h

Exercice : Extrema et courbe de niveau

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y.$$

I) Etude des extrema de f

1. Quels sont les points critiques de l'application f ?
2. Quelle est la nature du point critique $(0,2)$?
3. Le cours permet-il de déterminer la nature du point critique $(0,-2)$? Justifier votre réponse.
4. En étudiant l'application $x \mapsto f(x, x^3 - 2)$, que peut-on dire du point critique $(0,-2)$?

II) Une courbe de niveau de f

Soit Γ l'ensemble défini par

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ f(x,y) = -3\}.$$

1. Cet ensemble est-il une conique du plan ?
2. Montrer que Γ est une courbe symétrique par rapport à l'axe $(0y)$.
3. Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que la courbe Γ coïncide avec l'ensemble $\{(x, \varphi(x)), x \in \mathbb{R}\}$ au voisinage du point $(0,3)$.
4. En calculant $\varphi'(0)$, trouver une équation de la tangente à la courbe Γ au point $(0,3)$.
5. En calculant $\varphi''(0)$, donner la position de la courbe Γ par rapport à sa tangente au voisinage du point $(0,3)$.

Problème : Navigation sur la terre

Dans tout ce problème, la terre est notée S et est assimilée à une sphère de centre 0 et de rayon R. Les points de la terre peuvent être représentés par leurs coordonnées sphériques θ et φ, θ représentant la longitude et φ la latitude (en radians), ou par leurs coordonnées cartésiennes x, y et z, la correspondance se faisant par

$$x = R\cos\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\cos\varphi, \quad z = R\sin\varphi.$$

Dans tout le problème, la norme $||\cdot||$ désignera la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^3$.

PARTIE 1 : Loxodromies sur la terre

Un parallèle est une courbe coordonnée tracée sur la sphère S lorsque la latitude φ est fixée. Pour $\varphi_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$, un tel parallèle est paramétré par la longitude θ. On notera $P_{\varphi_0} : \mathbb{R} \to S$ l'application paramétrant le parallèle correspondant à la latitude $\varphi = \varphi_0$:

$$P_{\varphi_0}(\theta) = (R\cos\theta\cos\varphi_0,\ R\sin\theta\cos\varphi_0,\ R\sin\varphi_0).$$

1. Décrire le parallèle paramétré par P_{φ_0} (type de courbe, caractéristiques) selon les valeurs de $\varphi_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$.

2. Donner un vecteur tangent au parallèle paramétré par P_{φ_0} en un point de longitude $\theta \in \mathbb{R}$ pour $\varphi_0 \in]-\pi/2, \pi/2[$ puis calculer sa norme $||P'_{\varphi_0}(\theta)||$.

   Plus généralement, on considère les courbes tracées sur la terre $\gamma : I \to S$ de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrées par l'angle θ variant dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, telle que la latitude φ soit donnée par $\varphi = f(\theta)$.

3. Exprimer à l'aide de f la paramétrisation de γ.

4. A quelle application f correpond le parallèle P_{φ_0} ?

   Dans la suite du problème, on suppose que $f \in \mathcal{C}^2(I,]-\pi/2, \pi/2[)$.

5. Soit $\theta \in I$. Calculer le vecteur tangent $\gamma'(\theta)$ et sa norme $||\gamma'(\theta)||$ en fonction de f et de f'.

   Soient $\theta_0 \in I$ et $\varphi_0 = f(\theta_0)$. Les deux courbes P_{φ_0} et γ s'intersectent donc au point de coordonnées (θ_0, φ_0). On note $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ l'angle formé en ce point par le vecteur tangent à la courbe γ : $\gamma'(\theta_0)$ et le vecteur tangent au parallèle P_{φ_0} : $P'_{\varphi_0}(\theta_0)$.

6. En calculant les produits scalaires et vectoriels de ces deux vecteurs, en déduire que

   $$\tan\alpha = \frac{f'(\theta_0)}{\cos(f(\theta_0))}.$$

   Par la suite, on s'intéresse aux courbes γ tracées sur la sphère pour lesquelles cet angle est constant (ne dépend pas de θ_0). De telles courbes s'appellent des loxodromies.

7. En calculant la dérivée de la fonction

   $$g\ :\ x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

montrer que si la courbe γ passe par le point de coordonnées (θ_1, φ_1) et fait un angle constant α avec les parallèles alors $\varphi = f(\theta)$ est déterminée par la relation

$$\ln(\tan(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})) - \ln(\tan(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4})) = (\theta - \theta_1) \tan \alpha. \tag{1.1}$$

On admet pour la suite que la fonction f ainsi définie se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier : $I = \mathbb{R}$.

8. Préciser le comportement de $\varphi = f(\theta)$ lorsque θ tend vers $\pm\infty$. En déduire qu'une telle courbe γ traverse nécessairement l'équateur (c'est-à-dire le parallèle P_0) lorsque $\alpha \neq 0$.
9. Que se passe-t-il lorsque $\alpha = 0$?

PARTIE 2 : Navigation

Pour se déplacer sur la surface de la terre, un des moyens les plus anciens consiste à utiliser une boussole et à garder un cap constant (c'est-à-dire un angle constant avec les parallèles). Autrement dit, à l'aide d'une boussole, il est facile pour un avion ou un bateau de suivre une loxodromie.

On suppose que la trajectoire d'un avion suit une loxodromie d'angle $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$ avec $\alpha \neq 0$. Si le point de départ de l'avion est donné par les coordonnées (θ_1, φ_1) alors la relation entre la latitude φ et la longitude θ au cours du vol est donnée par la relation (1.1).

1. En déduire une paramétrisation F de la trajectoire de l'avion à l'aide de l'angle φ dans les coordonnées (x, y, z). On pourra, pour simplifier, noter $\theta(\varphi)$ la valeur de θ obtenue en fonction de φ à partir de la relation (1.1).
2. Montrer que la longueur de la trajectoire que parcourt l'avion entre son point de départ (θ_1, φ_1) et le point d'arrivée (θ_2, φ_2) s'écrit
$$L = C\left|\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\sin \alpha}\right|$$
où l'on déterminera la constante C (qui ne dépend que de R).

A titre indicatif, on rappelle que la longueur d'une courbe régulière paramétrée par une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ du type $F : t \in [a, b] \mapsto F(t) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par
$$L = \int_a^b ||F'(t)||\ dt.$$

PARTIE 3 : Arcs de cercles sur la terre

Une autre façon de se déplacer à la surface de la terre est de suivre un arc de grand cercle sur la sphère terrestre appelée orthodromie (moins facile avec uniquement une boussole!).

1. Etant donnés deux points P et Q sur la terre de coordonnées $P : (\theta_1, \varphi_1)$ et $Q : (\theta_2, \varphi_2)$, montrer que le cosinus de l'angle entre ces vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$) en fonction de $(\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2) \in [0, 2\pi]^2 \times [-\pi/2, \pi/2]^2$ s'exprime de la façon suivante (penser à utiliser le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$) :

$$\cos(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2.$$

2. A quelle(s) condition(s) sur θ_1, φ_1, θ_2 et φ_2, les points O, P et Q sont-ils alignés ?

   On pourra commencer par établir que

$$-\cos(\varphi_1+\varphi_2) \leq \cos(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) \leq \cos(\varphi_1-\varphi_2).$$

   Lorsque ces trois points O, P et Q ne sont pas alignés, on appelle C le cercle, intersection de la terre et du plan passant par O, P et Q.

3. Quelles sont les longueurs des deux arcs du cercle C qui joignent P à Q ?

PARTIE 4 : Exemple numérique

Le rayon de la terre est approximativement $R = 6370$ km. Le point P représente la ville de Sturmcity près de Lyon et le point Q représente la ville de Balactown en Asie. Les coordonnées de ces deux villes sont données (en degrés) par :

$$\widetilde{\theta_1} = 4, \quad \widetilde{\varphi_1} = 46, \quad \widetilde{\theta_2} = 110 \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi_2} = 30.$$

1. Quelle est la longueur, en kilomètres, du petit arc du cercle C qui joint Sturmcity à Balactown ?
2. Si un avion décide d'aller de Sturmcity à Balactown en suivant une loxodromie, quelle angle (constant) serait-il le plus judicieux de suivre sur sa boussole ?

   Remarque : 0 degré sur une boussole correspond au Nord alors que 90 degrés correspond à l'Ouest...

3. Quelle distance parcourera alors cet avion entre Sturmcity et Balactown ?
4. Comparer cette distance à celle de l'arc de cercle C joignant les deux villes (question 1).