INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES
PREMIER CYCLE INTERNATIONAL ASINSA

ASINSA MATHEMATICS LEVEL TEST 2010 / TEST DE NIVEAU EN MATHÉMATIQUES 2010
Duration : 2 hours / Durée : 2 heures

The following exercises are independant and can be solved in any order. Calculators are not allowed. Answers to exercices 1 to 5 must be written in the boxes next to the questions. Solutions to exercices 6 to 8 must be written in French or in English.
Les exercices sont indépendants et peuvent être résolus dans un ordre quelconque. Les calculatrices sont interdites. Les réponses aux exercices 1 à 5 doivent être données en face des questions. Les solutions aux exercices 6 à 8 doivent être rédigées en français ou en anglais.

Family Name / Nom	First Name / Prénom	School / Ecole	City / Ville

Exercise 1
Find the solution y of the following differential equations / *Déterminer la solution y des équations différentielles suivantes* :

	Answer / Réponse
1 . $y'(x) = y(x)$ such that / *telle que* $y(0) = 1$	
2 . $y''(x) + y(x) = 1$ such that / *telle que* $y(0) = y'(0) = 0$	
3 . $y''(x)+2y'(x)+y(x) = 0$ such that / *telle que* $y(0) = 0,\ y(1) = 1$	

Exercise 2
Represent the following complex numbers in algebraic form $a + \mathrm{i}b$ and in trigonometric form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ / *Mettez les nombres complexes suivants sous la forme algébrique $a + \mathrm{i}b$ puis sous la forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$* :

	Algebraic form / *Sous la forme $a + \mathrm{i}b$*	Trigonometric form / *Sous la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$*
1 . $\left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^{2009}$		
2 . $3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} + 4\,\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\pi/6}$		

Exercise 3
Differentiate with respect to x (give a simplified expression)/ *Calculer les dérivées en x (donner le résultat sous forme simplifiée)* :

	Answer/Réponse		Answer/Réponse
1 . $2x^6 - 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 47$		2 . $x\ln(x) - x$	
3 . $\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}}$		4 . $\dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)\cos(x)}{x\mathrm{e}^{x+\cos(x)} - x^2}$	

Exercise 4
Find the following limits / *Calculer les limites suivantes* :

	Answer/Réponse		Answer/Réponse
1 . $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$		2 . $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}$	
3 . $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^x$		4 . $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos(x)-1}{\mathrm{e}^x-1}$	

Exercise 5
Compute the following definite integrals / *Calculer les intégrales suivantes* :

	Answer/Réponse		Answer/Réponse
1 . $\displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}\,x$		2 . $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2\ln(x)}{x(1+(\ln(x))^2)} \,\mathrm{d}\,x$	
3 . $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2}{\sin(2x)} \,\mathrm{d}\,x$		4 . $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(x) \,\mathrm{d}\,x$	

Exercise 6
For each $n \in \mathbb{N}^*$, we define :/ *Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :*

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n \qquad \text{and/}\textit{et} \qquad S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

1 . Evaluate $S_1(2)$, $S_1(3)$, $S_3(2)$ and $S_3(3)$./ *Calculer $S_1(2)$, $S_1(3)$, $S_3(2)$ and $S_3(3)$.*
2 . Prove that :/ *Démontrer que :* $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_3(n) = (S_1(n))^2$.

Exercise 7
Find a least three functions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ such that :/*Déterminer au moins trois fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(x)f(y) + f(y).$$

Exercise 8

English version

In 1950, to go from A to B, the motorists successively use the three roads D07, D51 and D23 (see the left-hand side figure). These roads are broad and we need 1 hour to go through one of them, for any number of cars. Thus we need 3 hours to join A to B in 1950.

1 . In 1975, the authorities build a new fast road A1, but thin track : If N cars per hour want to go through the A1 motorway, they will put N minutes. Knowing that 50 cars per hour want to go from A to B in 1975, how long, on average, shall last the travel of each car ? (we will assume here and in all this exercise that each motorist thinks only of him and tries to optimize his own run time).

2 . Since 1990, a new fast road is built : A2 motorway exactly has the same characteristics as A1 motorway. Knowing that, in 1990, there are 80 cars per hour which want to go from A to B, how long, on average, shall last the travel of each car ?

3 . We almost are in 2010. Currently, one counts 120 cars per hour going from A to B. The authorities hesitate to build a A3 motorway (see the right-hand side figure) very fast and very broad which is gone through in 15 minutes, independently of the number of vehicles. Would the construction of this A3 motorway make it possible to decrease run time between A and B ? (justify your answer).

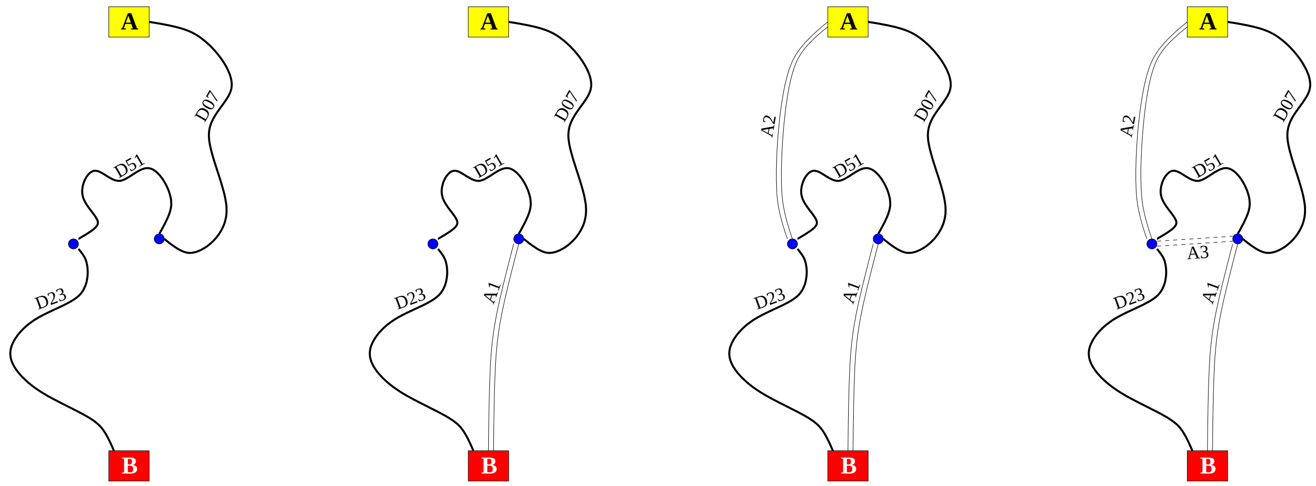

FIG. 1 – Road map in 1950, 1975, 1990 and 2010./ *Carte routière de 1950, 1975, 1990 et 2010.*

Version française

En 1950, pour aller de A à B, les automobilistes utilisent successivement les trois routes D07, D51 et D23 (voir la figure de gauche). Ces routes sont larges et il faut 1 heure pour en parcourir une, quelque soit le nombre d'automobiles. Ainsi, en 1950 il fallait 3 heures pour rallier A à B.

1 . En 1975, les autorités construisent une voie rapide A1 mais étroite : Si N voitures par heure veulent parcourir l'autoroute A1, elles mettront N minutes. Sachant qu'il y a 50 voitures par heure qui veulent aller de A à B en 1975, combien de temps mettra chaque voiture en moyenne ? (on supposera ici et dans tout l'exercice que chaque automobliste ne pense qu'à lui et essaye d'optimiser son propre temps de parcours).

2 . Dès 1990, une nouvelle voie rapide est construite : l'autoroute A2 possède exactement les mêmes caractéristiques que l'autoroute A1. Sachant qu'en 1990 il y a 80 voitures par heure qui veulent aller de A à B, combien de temps mettra chaque voiture en moyenne ?

3 . Nous sommes presque en 2010. Actuellement, on dénombre 120 voitures par heure allant de A à B. Les autorités hésitent à construire une autoroute A3 (voir la figure de droite) très rapide et très large qui se parcourt en 15 minutes, indépendamment du nombre de véhicules. La construction de cette autoroute A3 permettrait-elle de diminuer le temps de parcours entre A et B ? (justifier votre réponse).