Corrigé Exam CD 2011-2012

Exo 1.

a) $f = \psi \circ (Ax, x)$ où $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\psi(y,z) = \langle y, z \rangle$ (produit scalaire)

ψ est bilinéaire donc différentiable
la fonction $x \to (Ax, x)$ est linéaire donc différentiable
Donc f est différentiable et on a

$D f(x)(h) = D\psi(Ax, x)(Ah, h) = \psi(Ah, x) + \psi(Ax, h) =$
$= \underbrace{\langle Ah, x \rangle}_{= \langle h, A^T x \rangle} + \langle Ax, h \rangle = \langle (A + A^T) x, h \rangle$, $\forall$ ~~$h \in \mathbb{R}^n$~~ $x, h \in \mathbb{R}^n$.

Donc $D f(x)(h) = \langle (A + A^T) x, h \rangle$

b) On introduit la fonction
$B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad B(t, y) = ty \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^n$
B est bilinéaire donc différentiable
On introduit aussi la fonction
$\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
$\theta(x) = \sin(\langle Ax, x \rangle)$, $\theta = \sin \circ f$ (f de a))
~~Alors $g = B \circ (\theta, id)$~~ donc θ est différentiable

~~B est~~
On a : $g = B \circ (\theta, id)$, donc g est différentiable comme composée des fonct. différentiables

Alors
$Dg(x)(h) = DB(\theta(x), x)(D\theta(x)(h), h) = B(\theta(x), h) + B(D\theta(x)(h), x)$

$= \theta(x) \cdot h + D\theta(x)(h) \cdot x$

D'autre part, $D\theta(x)(h) = D\sin(f(x))(Df(x)(h)) =$
$=$ ~~$\cos(f(x))$~~ $\cos(\langle Ax, x \rangle) \cdot \langle (A + A^T) x, h \rangle$.

On déduit alors
$Dg(x)(h) = \sin(\langle Ax, x \rangle) \cdot h + \cos(\langle Ax, x \rangle) \langle (A + A^T) x, h \rangle \cdot x$
$\forall x, h \in \mathbb{R}^n$

c) C'est un cas particulier $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de b)

(car $x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x, x \rangle$)

Alors $\langle (A + A^T) x, h \rangle = 2x_1h_1 - 2x_2h_2 + 2(x_2h_1 + x_1h_2)$

$D\varphi(x)(h) = \sin(x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2) \cdot h + \cos(x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2) \cdot$
$\cdot (2x_1h_1 - 2x_2h_2 + 2x_2h_1 + 2x_1h_2) \cdot x$

$\forall$ ~~x_1, x_2~~ $x, h \in \mathbb{R}^2$

Exo 2.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = y + 2x$.

Résoudre : $\begin{cases} 4x^3+2y = 0 \\ y+2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y = -2x. \end{cases}$

On obtient les ~~solutions~~ points critiques : $(x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (1,-2)$ ou $(x,y) = (-1,2)$

b) La matrice Hessienne de f est donnée par

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres : $\det\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 4 = 0$
comme $\lambda_1\lambda_2 = -4 \Rightarrow \lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$

donc $(0,0)$ n'est pas un point d'extremum local

$H_f(1,-2) = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ici det $\begin{pmatrix} \lambda-12 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-12)(\lambda-1) - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 8$

On a $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

donc $(1,-2)$ est un point de minimum local

$H_f(-1,2) = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ c'est pareil que pour $(-1,2)$

$(-1,2)$ est une point ~~d'extr~~ de minimum local.

c) $f(1,-2) = f(-1,2) = -1$?

A-t-on $f(x,y) \geq -1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y)+1 = x^4 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy + 1 = \frac{1}{2}\big(\underbrace{y^2 + 4xy + 4x^2}_{=(y+2x)^2 \geq 0}\big)$

$+ \underbrace{x^4 - 2x^2 + 1}_{=(x^2-1)^2 \geq 0} \geq 0$

donc $f(x,y) \geq f(1,-2) = f(-1,2)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

donc $(1,-2)$ et $(-1,2)$ sont des points ~~d'extrema~~ de minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$

Exo 3.

a) Il est clair que $f \in C^1(\mathbb{R} - \{t_0\})$

On a aussi $\lim_{t \to t_0} g(t) = f'(t_0) = g(t_0)$

donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

D'autre part on a :

si $t \neq t_0$ alors $g'(t) = \dfrac{f'(t)(t-t_0) - (f(t)-f(t_0))}{(t-t_0)^2}$

A-t-on : $\exists \lim_{t \to t_0} g'(t)$?

On utilise Taylor-Young à l'ordre 1 pour f' et à l'ordre 2 pour f, les deux autour de t_0. On a :

$$g'(t) = \frac{1}{(t-t_0)^2}\Big\{\big[f'(t_0) + f''(t_0)(t-t_0) + o(|t-t_0|)\big](t-t_0) - \big(\cancel{f(t_0)} + f'(t_0)(t-t_0) + \tfrac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 + o(|t-t_0|^2) - \cancel{f(t_0)}\big)\Big\}$$

En simplifiant, on trouve

$$g'(t) = \frac{1}{(t-t_0)^2}\left(\frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 + o(|t-t_0|^2)\right)$$

Ceci nous donne : $\lim_{t \to t_0} g'(t) = \frac{1}{2} f''(t_0)$

On deduit alors que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $g'(t_0) = \frac{1}{2} f''(t_0)$.

b) On pose $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x,t) = g(x) - f'(t)$

On a : F de classe C^1 (car $g \in C^1$ et $f \in C^2$)

$F(t_0, t_0) = 0$ (car $g(t_0) = f'(t_0)$)

$\frac{\partial F}{\partial x}(t_0, t_0) = g'(t_0) = \frac{1}{2} f''(t_0) \neq 0$ (de a)) et par hypothèse.

On peut alors ~~[illegible]~~ utiliser le théorème des fonctions implicites pour F et on a le résultat.

c) On utilise la formule du cours :

$$\phi'(t_0) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x}(t_0,t_0)} \cdot \frac{\partial F}{\partial t}(t_0,t_0)$$ donc

$$\phi'(t_0) = -\frac{1}{\frac{1}{2}f''(t_0)} \cdot \left(-f''(t_0)\right) = 2$$

__Autre méthode__ : on derive en t : $g(\phi(t)) = f'(t)$ →

$g'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f''(t)$; prendre en $t = t_0$:

$g'(t_0) \cdot \phi'(t_0) = f''(t_0) \iff \frac{1}{2} f''(t_0) \cdot \phi'(t_0) = f''(t_0)$ donc

$$\phi'(t_0) = \frac{f''(t_0)}{\frac{1}{2}f''(t_0)} = 2.$$