Corrigé

Exo 1.

Il est clair que f est de classe C^1. ~~Il~~ Le Jacobien de f est

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x & \cosh(y) \\ \cosh(x) & -\cos y \end{pmatrix}$$

avec $\underset{\text{ch}(t)}{\cosh(t)} = \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})$ = cosinus hyperbolique

$\det(J_f(x,y)) = -\cos x \cos y - \text{ch}(x)\,\text{ch}(y) = -[\cos x \cos y + \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y]$

On rappelle $\text{ch}\, t \geq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, donc

$\text{ch}\, x\, \text{ch}\, y \geq 1$

D'autre part, $\cos x \cos y \geq -1$ (car $|\cos x \cos y| \leq 1$)

On somme $\Rightarrow \cos x \cos y + \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y \geq 0$

On a $\cos x \cos y + \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y = 0 \iff \begin{cases} \text{ch}\, x\, \text{ch}\, y = 1 \\ \text{et} \\ \cos x \cos y = -1 \end{cases}$

Mais $\text{ch}\, x\, \text{ch}\, y = 1 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow \cos x \cos y = 1$

Donc on a $\det(J_f(x,y)) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Il suffit de montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

On va montrer : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ il existe une solution unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ de $f(x,y) = (a,b) \iff$

On note $\text{sh}(t) = \sinh(t)$

$$\begin{cases} (1) & \sin x + \text{sh}(y) = a \\ (2) & \text{sh}\, x - \sin y = b \end{cases}$$

On sait que la fonction $y \in \mathbb{R} \to \text{sh}(y) \in \mathbb{R}$ est bijective et strictement croissante. On note argsh sa réciproque

De $(1) \Rightarrow y = \text{argsh}(a - \sin x)$

On remplace en (2)

Il suffit de montrer : il existe une solution unique $x \in \mathbb{R}$ de l'équation

(3) $g(x) = b$

avec $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $g(x) = \text{sh}\, x - \sin[\text{argsh}(a - \sin x)]$

Il suffit de montrer que g est bijective

Comme $\lim_{x \to \pm\infty} \text{sh}\, x = \pm\infty$ et $\sin(\ldots)$ bornée

on déduit : $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$

Il suffit alors de montrer que $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = \underbrace{\underbrace{ch\, x}_{\geq 1}}_{>1 \text{ si } x\neq 0} + \underbrace{\underbrace{\cos(\arg sh(a-\sin x))}_{\in[-1,1]} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+(a-\sin x)^2}}}_{\in]0,1]} \cdot \underbrace{\cos x}_{\in[-1,1]}}_{\geq -1}$$

Alors $g'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

~~Mo $g'(x)$ peut etre 0 si $ch\, x = 1 \Leftrightarrow x = 0$~~

$$g'(0) = 1 + \underbrace{\cos(\arg sh(a))}_{\in[-1,1]} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}_{\in]0,1]} > 0$$

si $a \neq 0 \Rightarrow \cos(\arg sh(a)) \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \in]-1,1[$ donc $g'(0) > 0$

si $a = 0$ alors $g'(0) = 2 > 0$

OK!

Autre methode : si $g'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow g$ strict. croissante (même pour $g'(0) = 0$)

Exercice 2.

a) $f(x+\lambda h) = f(x) + \lambda \langle \nabla f(x), h \rangle + \int_0^1 \cancel{(1-t) \langle H_f(x+t\lambda h) h, h \rangle}$

$+ \int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \underbrace{\langle H_f(x+t\lambda h)(\lambda h), \lambda h \rangle}_{\leq M\lambda^2\|h\|^2} dt$

Donc

$0 < f(x+\lambda h) \leq f(x) + \lambda \langle \nabla f(x), h \rangle + M\lambda^2\|h\|^2 \cdot \underbrace{\int_0^1 (1-t)dt}_{=\frac{1}{2}}$

OK!

b) Nous avons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ avec

$A\lambda^2 + B\lambda + C > 0$: $B = \langle \nabla f(x), h \rangle$: $C = f(x)$

$A = \frac{1}{2} M\|h\|^2$ et ceci implique $\Delta < 0$

Pour $h \neq 0 \Rightarrow A > 0$

Δ = le discriminant, $\Delta = B^2 - 4AC$. Donc

(*1) $|\langle \nabla f(x), h \rangle|^2 < 2M\|h\|^2 \cdot f(x) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0.$

Ceci est valable

Si $\nabla f(x)=0$ alors l'inégalité de b) est évidente

Si $\nabla f(x)\neq 0$ prendre $h=\nabla f(x)$ en $(*1)$, ce qui donne

$$\|\nabla f(x)\|^4 < 2M\,\|\nabla f(x)\|^2 . f(x) \iff$$

$$\|\nabla f(x)\|^2 < 2M f(x) \iff \|\nabla f(x)\| < \sqrt{2M f(x)}$$

c) Prendre ~~$f : \mathbb{R} \to$~~ $n=1$, $f(x)=x^2+\sin x+2$

$f(x)\geq \sin x+2\geq 1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\qquad H_f(x)=f''(x)$

$f''(x)=2 \sin x \leq 3$

$f''(x)\,h^2\leq 3h^2$ donc $M=3$ $\qquad \forall x\in\mathbb{R}$

De b) $\Rightarrow$ $|f'(x)|\leq\sqrt{2\cdot 3\, f(x)}$

$$\underset{2x+\cos x}{\overset{\parallel}{f'(x)}}$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 3.

f est de classe C^1, $\nabla f(x)=\begin{pmatrix} x+yz \\ xz+1 \\ xy-1 \end{pmatrix}$

Résoudre $\begin{cases} x+yz=0 \\ xz+1=0 \\ xy-1=0 \end{cases} \Rightarrow x(y+z)=0 \Rightarrow$ $x=0$ (impossible $\Rightarrow 1=0$) ou $y=-z$. OK!

donc $\left.\begin{matrix} x-z^2=0 \Rightarrow xz=z^3 \\ xz=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z^3=-1 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=$

Donc $(x,y,z)=(1,1,-1)$ est le seul point critique $(\nabla f=0)$

donc le seul extremum local possible

$H_f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 1 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ donc $H_f(1,1,-1)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda-1 \end{vmatrix}=$$

$$=\cancel{(1-\lambda)}\left[\cancel{(\lambda-1)(\lambda+1)}\right]=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda-1 \end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(\lambda+1)(\lambda-1)-2\right]$$

$=(1-\lambda)(\lambda^2-3)$ $\Rightarrow$ $\lambda_1=-\sqrt{3}$; $\lambda_2=1$; $\lambda_3=\sqrt{3}$

Donc A n'est pas semi-définie pos $\Rightarrow (1,1,-1)$ n'est pas un min. local

Pareil pour $-A$ donc $(1,1,-1)$ n'est pas un max. local.

pas d'extrem. local $\Rightarrow$ pas d'extrem. global!