Université Claude Bernard, Lyon 1
EPUL - MAM1

Examen Calcul différentiel 2010-2011 - première session

Durée 2h - Calculettes interdites, Une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (\sin(x) + \sinh(y),\ \sinh(x) - \sin(y)), \quad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Rappel: $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}),\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ *(le sinus hyperbolique)*

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous notons par $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^n$ et par $\| \cdot \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que:

1. $$f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

2. Il existe $M > 0$ tel que

$$< H_f(x)h, h > \leq M\|h\|^2, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n.$$

où $H_f(x)$ est la matrice hessienne de f en x.

a) Montrer qu'on a

$$f(x) + \lambda < \nabla f(x), h > + \frac{\lambda^2}{2} M\|h\|^2 > 0, \quad \forall\, x, h \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(*Indication: appliquer la formule de Taylor avec reste intégral.*)

b) En déduire que $\|\nabla f(x)\| < \sqrt{2M\, f(x)},\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

c) *Application:* Montrer qu'on a

$$|2x + \cos x| < \sqrt{6(x^2 + \sin x + 2)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,\ y,\ z) = \frac{x^2}{2} + x\, y\, z - z + y, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Déterminer les extremums locaux et globaux de f.