Corrigé Exam Optimisation M1 SAF 2012-2013

Problème

Partie I. I a) $0 \in O$ donc $O \neq \emptyset$

$O = \{x \in \mathbb{R}^n : \theta_i(x) = 0, \quad i = 1 \dots m\}$ avec

$\theta_i(x) = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} x_j = \langle B_{i.}, x \rangle$

où on note $B_{i.}$ le vecteur $(B_{ij})_{j=1 \dots n}$

Alors $O = \{x \in \mathbb{R}^n : \theta_i(x) \leq 0, \varphi_i(x) \leq 0, \quad i = 1 \dots m\}$

avec $\varphi_i = -\theta_i$

I b) Toutes les ~~co~~ fonctions θ_i, φ_i sont continues et convexes (car affines) donc O convexe et ~~En plus, O est~~ fermé.
~~Com~~ ~~est~~ Comme A est SDP alors J est elliptique.
On a alors $\exists$ et ! de u^*

I c) Tous les points de O sont qualifiés (car θ_i, φ_i sont affines). Alors $\exists$ ~~q_i, r_i~~ $q_i \geq 0$, $r_i \geq 0$, $i = 1, 2 \dots m$ tels que (KKT):

$$\begin{cases} \nabla J(u^*) + \sum_{i=1}^{m} q_i \nabla \theta_i(u^*) + \sum_{i=1}^{m} r_i \underbrace{\nabla \varphi_i(u^*)}_{= -\nabla \theta_i(u^*)} = 0 \\ q_i \theta_i(u^*) = 0 \qquad i = 1 \dots m \\ -r_i \theta_i(u^*) = 0 \qquad i = 1 \dots m \end{cases}$$

$\to$ celles-ci ne donnent rien ! (car $\nabla J(x) = Ax - d$)

On a alors

$$Au^* - d + \sum_{i=1}^{m} (q_i - r_i) \underbrace{\nabla \theta_i(u^*)}_{= B_{i.}^T} = 0$$

Si on note $p_i^* = q_i - r_i \in \mathbb{R}$ et $p^* = (p_1^*, p_2^* \dots p_m^*)^T$ alors

$Au^* - d + B^T p^* = 0$

D'autre part, on doit avoir $u^* \in O$ donc

$Bu^* = 0$ Ceci finit la preuve de (1).

Partie II. II a) Supposons que les valeurs propres de A rangées en ordre croissant sont

$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$

Alors les valeurs propres de $I_n - \rho_1 A$ sont

$$1 > 1-\rho_1\lambda_1 \geq 1-\rho_1\lambda_2 \geq \cdots\cdots \geq 1-\rho_1\lambda_n$$

On choisit $\rho_1 > 0$ tel que $1-\rho_1\lambda_n > -1 \iff$

$\rho_1\lambda_n < 2 \iff \rho_1 < \frac{2}{\lambda_n}$

Alors tous les valeurs propres de $I_n-\rho_1 A$ sont dans l'intervalle $]-1,1[$. Alors ~~ρ(In~~ le rayon spectral de cette matrice est <1 ce qui montre II a.)

II b) De (3) on obtient

$$p^{(k+1)}-p^* = p^{(k)}-p^* + \rho_1\rho_2 Bu^{(k)} - \rho_1\rho_2 Bu^*$$

(car $Bu^* = 0$)

ce qui donne (4)

De (2) on obtient

$$u^{(k+1)}-u^* = u^{(k)}-u^* - \rho_1\left(Au^{(k)}-d+B^Tp^{(k)}\right) +$$

$$+\rho_1\left(Au^*-d+B^Tp^*\right)$$

(car de (1) on a : $Au^*-d+B^Tp^*=0$)

Ceci donne

$$u^{(k+1)}-u^* = u^{(k)}-u^* - \rho_1 A(u^{(k)}-u^*) - \rho_1 B^T(p^{(k)}-p^*)$$

$$= (I_n-\rho_1 A)(u^{(k)}-u^*) - \rho_1 B^T(p^{(k)}-p^*)$$

donc (5).

II c). De (4) on obtient

$$(*)\quad \|p^{(k+1)}-p^*\|^2 = \|p^{(k)}-p^*\|^2 + (\rho_1\rho_2)^2\|B(u^{(k+1)}-u^*)\|^2 +$$

$$+2\rho_1\rho_2 \langle p^{(k)}-p^*, B(u^{(k+1)}-u^*)\rangle$$

Nous avons :

$$2\rho_1\rho_2\langle p^{(k)}-p^*, B(u^{(k+1)}-u^*)\rangle = $$

on utilise (5)

$$= 2\rho_2\langle \rho_1 B^T(p^{(k)}-p^*), u^{(k+1)}-u^*\rangle =$$

$$= 2\rho_2\langle (I_n-\rho_1 A)(u^{(k)}-u^*) - (u^{(k+1)}-u^*), u^{(k+1)}-u^*\rangle$$

$$= 2\rho_2\langle (I_n-\rho_1 A)(u^{(k)}-u^*), (u^{(k+1)}-u^*)\rangle - 2\rho_2\|u^{(k+1)}-u^*\|^2$$

$$= 2\rho_2\langle (I_n-\rho_1 A)(u^{(k)}-u^*),$$

En remplaçant dans (*) on obtient le résultat.

II d) On utilise les inégalités :

$\|B(u^{(k+1)}-u^*)\| \le \|B\|\cdot\|u^{(k+1)}-u^*\|$

et aussi par Cauchy-Schwarz :

$\langle (I_n-\rho_1 A)(u^{(k)}-u^*),\, u^{(k+1)}-u^* \rangle \le$

$\|(I_n-\rho_1 A)(u^{(k)}-u^*)\|\cdot\|u^{(k+1)}-u^*\| \le$

$\le \|I_n-\rho_1 A\|\cdot\|u^{(k)}-u^*\|\cdot\|u^{(k+1)}-u^*\| = \beta\|u^{(k)}-u^*\|\cdot\|u^{(k+1)}-u^*\|$

~~En injectant dans l'égalité de II c) on obtient~~

$\cancel{\|p^{(k+1)}-p^*\|^2 \le \|p^{(k)}-p^*\|^2 +}$

$\le \frac{\beta}{2}\|u^{(k)}-u^*\|^2 + \frac{\beta}{2}\|u^{(k+1)}-u^*\|^2$

(on a utilisé $xy \le \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$)

En utilisant tout ceci dans l'égalité de II c) on obtient

$\|p^{(k+1)}-p^*\|^2 \le \|p^{(k)}-p^*\|^2 + (\rho_1\rho_2)^2\|B\|^2\|u^{(k+1)}-u^*\|^2 + \ldots$

$\ldots - 2\rho_2\|u^{(k+1)}-u^*\|^2 + \rho_2\beta\|u^{(k)}-u^*\|^2 + \rho_2\beta\|u^{(k+1)}-u^*\|^2$

$= \|p^{(k)}-p^*\|^2 + \rho_2\beta\|u^{(k)}-u^*\|^2 + \rho_2\left(\rho_1^2\rho_2\|B\|^2+\beta-2\right)\|u^{(k+1)}-u^*\|^2$

Ceci donne l'inégalité demandée.

II e) On choisit $\rho_2>0$ tel que

$\rho_2\left(2-\beta-\rho_1^2\rho_2\|B\|^2\right) > \rho_2\beta$

(le coefficient de $\|u^{(k+1)}-u^*\|^2$ soit $>$ au coefficient de $\|u^{(k)}-u^*\|^2$)

Ceci est équivalent à :

$2-\beta-\rho_1^2\rho_2\|B\|^2 > \beta \iff \rho_1^2\rho_2\|B\|^2 < 2(1-\beta)$

Si $\|B\|=0$ $(\Rightarrow B=0)$ alors ceci est vrai $\forall \rho_2 \in \mathbb{R}_+^*$

Si $\|B\|>0$ choisir $\rho_2 < 2\dfrac{1-\beta}{\rho_1^2\|B\|^2}$ (possible car $\beta<1$)

~~(possible car $\beta<1$)~~

Donc $0<\rho_2 < 2\dfrac{1-\beta}{\rho_1^2\|B\|^2}$

On notera alors ~~avec~~ donc $\vartheta>0$

$$\vartheta = \rho_2(2-\beta-\rho_1^2\rho_2\|B\|^2)-\rho_2\beta$$

Alors $\rho_2(2-\beta-\rho_1^2\rho_2\|B\|^2) = \rho_2\beta+\vartheta$

De II c) on deduit alors

$$(**)\quad \|p^{(k+1)}-p^*\|^2 + \rho_2\beta\|u^{(k+1)}-u^*\|^2 + \vartheta\|u^{(k+1)}-u^*\|^2 \le \|p^{(k)}-p^*\|^2 + \rho_2\beta\|u^{(k)}-u^*\|^2$$

On deduit alors

$$\|p^{(k+1)}-p^*\|^2+\rho_2\beta\|u^{(k+1)}-u^*\| < \|p^{(k)}-p^*\|^2+\rho_2\beta\|u^{(k)}-u^*\|^2 \equiv x_k \text{ noté}$$

donc la suite $\|p^{(k)}-p^*\|^2+\rho_2\beta\|u^{(k)}-u^*\|^2$ est decroissante. Comme elle est ≥ 0 elle est convergente ; soit $l \geq 0$ sa limite.

On deduit de $(**)$

$$\vartheta\|u^{(k+1)}-u^*\|^2 \le x_k - x_{k+1}$$

donc

$$0 \le \|u^{(k+1)}-u^*\|^2 \le \frac{1}{\vartheta}(\underbrace{x_k}_{\to l} - \underbrace{x_{k+1}}_{\to l}) \longrightarrow 0 \text{ si } k\to\infty$$

donc $u^{(k)} \to u^*$

Partie III

III a) $O = \{x\in\mathbb{R}^3 : x_1=0 ; -x_2+x_3=0\}$: $0\in O$ donc $O\neq\emptyset$

III b) Il suffit de montrer que A est une matrice SDP : voir Partiel 2012-2013 Problème 1.

Ceci donne l'existence et l'unicité de u^*.

Pour trouver u^* on cherche à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right.$$

Ceci donne

$$\left\{\begin{array}{l} 6u_1 + 2u_3 + P_1 = 0 \\ 6u_2 + 2u_3 + 5 - P_2 = 0 \\ 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + P_2 = 0 \\ u_1 = 0 \\ -u_2 + u_3 = 0 \implies u_2 = u_3 \end{array}\right. \quad \longleftarrow \text{remplacer } u_1 = 0,\ u_2 = u_3$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2u_3 + P_1 = 0 \\ 8u_3 - P_2 = -5 \\ 4u_3 + P_2 = 0 \end{array}\right. \text{somme} \implies u_3 = \frac{-5}{12} \implies u_2 = \frac{-5}{12} \implies P_1 = +\frac{5}{6}, \quad P_2 = +\frac{5}{3}$$

Donc $u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -5/12 \\ -5/12 \end{pmatrix}$

III c) $u^{(1)} = u^{(0)} - \frac{1}{5}(-d) = \frac{1}{5}d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$P^{(1)} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u^{(2)} = u^{(1)} - \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{25} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/25 \\ 1/25 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{26}{25} \\ -\frac{49}{25} \end{pmatrix}$$

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 + \frac{26}{125} \\ \frac{49}{125} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{99}{125} \\ \frac{49}{125} \end{pmatrix}$$