ISFA, 2 - ème Année - M1SAF, 2012-2013

Examen Optimisation, janvier 2013

Durée 2h - Notes de cours autorisées

Rappel 1): Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ et toute matrice $Q \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ nous notons par $\|Q\|$ la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle euclidienne; cette norme est définie par

$$\|Q\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{\|Qx\|}{\|x\|}.$$

Rappellons que nous avons

$$\|Qy\| \leq \|Q\| \cdot \|y\| \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Rappellons aussi que si $m = n$ et si Q est symmetrique alors

$$\|Q\| = \rho(Q) \text{ (rayon spectral de } Q \text{)} = \max\{|\lambda|,\ \lambda \text{ valeur propre de } Q\}.$$

Rappel 2): Si $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ alors λ est une valeur propre des Q si et seulement si $a + b\lambda$ est une valeur propre de la matrice $aI_n + bQ$, où I_n est la matrice identité en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Problème

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symmetrique et définie positive (SDP), $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $d \in \mathbb{R}^n$.

On considère la fonction $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < d, x > \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

et l'ensemble des contraintes

$$O = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad Bx = 0\}.$$

On considère alors le problème d'optimisation

$$\min_{x \in O} J(x).$$

Partie I).

Ia) Montrer que $O \neq \emptyset$ et qu'on peut écrire O comme un ensemble donné par $2m$ inégalités larges (à préciser).

Ib) Montrer l'existence et l'unicité d'un point de minimum de J sur O; dans la suite nous notons par u^* ce point de minimum.

Ic) Montrer qu'il existe $p^* \in \mathbb{R}^m$ tel que le système suivant soit satisfait:

$$(1) \qquad \begin{cases} Au^* - d + B^T p^* = 0 \\ Bu^* = 0. \end{cases}$$

Partie II).

On propose dans cette partie un algorithme (appellé *l'algorithme d'Arrow-Hurwicz*) pour l'approximation numérique de u^*. On se donne $u^{(0)} \in I\!R^n$ et $p^{(0)} \in I\!R^m$ et on définit par reccurence les suites $u^{(k)} \in I\!R^n$ et $p^{(k)} \in I\!R^m$ à l'aide des égalités suivantes:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \rho_1 \left(Au^{(k)} - d + B^T p^{(k)} \right) \qquad \forall\, k \in I\!N \tag{2}$$

et

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \rho_1 \rho_2 B u^{(k+1)} \qquad \forall\, k \in I\!N \tag{3}$$

où $\rho_1, \rho_2 > 0$ sont des paramètres qu'on choisira convenablement.
Le but de cette partie est de montrer que si on choisit ρ_1 et ρ_2 assez petits alors on a la convergence $u^{(k)} \to u^*$ si $k \to +\infty$.
Remarque: $u^{(k)}$ n'est pas nécessairement un élément de O; c'est la limite u^* qui est un élément de O.
IIa) Montrer que si $\rho_1 > 0$ est assez petit (à préciser en fonction des valeurs propres de A) alors $\|I_n - \rho_1 A\| < 1$; on notera dans la suite $\beta = \|I_n - \rho_1 A\|$.
IIb) Montrer que nous avons

$$p^{(k+1)} - p^* = p^{(k)} - p^* + \rho_1 \rho_2 B \left(u^{(k+1)} - u^* \right) \tag{4}$$

et

$$u^{(k+1)} - u^* = (I_n - \rho_1 A) \left(u^{(k)} - u^* \right) - \rho_1 B^T \left(p^{(k)} - p^* \right). \tag{5}$$

IIc) Montrer l'égalité

$$\begin{aligned} &\|p^{(k+1)} - p^*\|^2 = \|p^{(k)} - p^*\|^2 + (\rho_1\rho_2)^2 \|B \left(u^{(k+1)} - u^* \right)\|^2 + \\ &2\rho_2 < (I_n - \rho_1 A) \left(u^{(k)} - u^* \right), u^{(k+1)} - u^* > -2\rho_2 \| \left(u^{(k+1)} - u^* \right) \|^2. \end{aligned}$$

IId) En déduire l'inégalité

$$\|p^{(k+1)} - p^*\|^2 + \rho_2 (2 - \beta - \rho_1^2 \rho_2 \|B\|^2) \|u^{(k+1)} - u^*\|^2 \le \|p^{(k)} - p^*\|^2 + \rho_2 \beta \|u^{(k)} - u^*\|^2.$$

IIe) Montrer que si on choisit $\rho_2 > 0$ assez petit (à préciser en fonction des ρ_1, β et $\|B\|$) alors on a

$$u^{(k)} \to u^* \quad \text{si} \quad k \to +\infty.$$

(*Indication: montrer d'abord que la suite réelle* $\|p^{(k)} - p^*\|^2 + \rho_2 \beta \|u^{(k)} - u^*\|^2$ *est une suite décroissante.*

Partie III).

On considère dans cette partie le cas particulier: $m = 2,\ n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

IIIa) Ecrire l'ensemble O dans ce cas et montrer que $O \neq \emptyset$.
IIIb) Montrer l'existence et l'unicité de u^* dans ce cas et calculer u^*.
IIIc) On se donne $u^{(0)} = 0,\ p^{(0)} = 0$ et $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{5}$. En utilisant l'algorithme introduit dans la **Partie II)** calculer $u^{(1)},\ p^{(1)}$ et $u^{(2)}$.