Corrigé Examen Optimisation M1 SITN 2013

Partie I

I a) U_0 est un ensemble fermé et convexe
$U_0 = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \varphi(x) \leq 0\}$

- fermé car φ continue
- convexe car φ convexe (vu en cours)

Existence : Il y a deux cas :

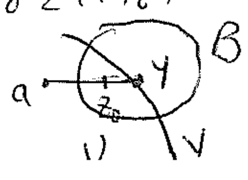
- Si U_0 est borné alors U_0 est compact. Comme J est continue on a le résultat
- si U_0 est non-bornée alors on utilise le fait que J est coercive sur U_0 (car coercive sur $\mathbb{R}^n$)

Unicité résulte du fait que J est strictement convexe et U_0 convexe (vu en cours)

I b) On fixe $a \in U$, donc $\varphi(a) < 0$
On veut : $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) \leq -\delta$. Il suffit de prendre δ tel que $0 \leq \delta \leq -\varphi(a)$. Alors $-\varphi(a) \geq \delta$ donc $\varphi(a) \leq -\delta$ donc $a \in U_\delta$.
~~Alors~~ en prenant $\delta_0 = -\varphi(a)$ ~~alors~~ on a $a \in U_\delta$ (donc $U_\delta \neq \emptyset$) $\forall\, \delta \in]0, \delta_0]$.

~~I c) Il faut minorer $J_\varepsilon(y)$ pour $y \in U - U_\delta$ (donc $\varphi(y) = 0$)~~
~~D'autre part, on veut sait qu'il existe $y \in V$ (donc $-\delta \leq \varphi(z) < 0$)~~
~~et on veut trouver $z \in U - U_\delta$ (donc ...) : soit B une boule centrée ... Ceci résulte par continuité de φ en y : soit B ... $\varphi(t) \in]-\delta, \delta[$ $\forall t \in B$. Prendre $z \in B \cap [a, y]$; Alors $\varphi(z) \in]-\delta, \delta[$ et $\varphi(z) \leq \alpha \underbrace{\varphi(a)}_{\leq 0} + (1-\alpha) \underbrace{\varphi(y)}_{= 0} < 0$~~
~~$z = \alpha a + (1-\alpha) y$, $\alpha \in]0, 1[$.~~

D'autre part, soit $y \in V$ (donc $\varphi(y) = 0$). Soit B une boule centrée en y telle que $\varphi(z) \in]-\delta, \delta[$ $\forall z \in B$ (on a utilisé la continuité de φ). Soit $z_0 \in B \cap [a, y]$ (donc $z_0 = \alpha a + (1-\alpha) y$, avec $\alpha \in]0, 1[$). Alors $\varphi(z_0) \leq \alpha \underbrace{\varphi(a)}_{< 0} + (1-\alpha) \underbrace{\varphi(y)}_{= 0} < 0$ donc $\varphi(z_0) < 0$ et $-\delta < \varphi(z_0) < \delta$
donc $z_0 \in U - U_\delta$



(I c 1) Il faut minorer $J_k(y)$, $\forall y \in U - U_\delta$

On a : $-\delta < \varphi(y) < 0 \quad \forall\ y \in U - U_\delta$ donc

$0 < -\varphi(y) < \delta$ donc $-\frac{1}{\varphi(y)} > \frac{1}{\delta}$ donc ~~$\frac{1}{k\varphi(y)} > \frac{1}{k\delta}$~~

(*1) $-\frac{1}{k\varphi(y)} > \frac{1}{k\delta} \quad \forall\ y \in U - U_\delta$

D'autre part $U - U_\delta \subset U_0$ donc

(*2) $J(y) \geq J(x^*) \quad \forall\ y \in U - U_\delta$

En ajoutant (*1) et (*2) $\Rightarrow$ $\forall\ y \in U - U_\delta$

$J_k(y) \geq J(x^*) + \frac{1}{k\delta}$

En passant au $\inf\limits_{y \in U - U_\delta}$ on trouve

$\inf\limits_{y \in U - U_\delta} J_k(y) \geq \underbrace{J(x^*) + \frac{1}{k\delta}}_{\longrightarrow +\infty \text{ si } \delta \to 0,\ \delta > 0}$

donc OK!

(I c 2) Comme en I b) si $0 \leq \delta \leq -\varphi(a)$ alors

on a : $a \in U_\delta$. Alors $\inf\limits_{y \in U_\delta} J_k(y) \leq J_k(a) = J(a) - \frac{1}{k\varphi(a)}$

(I c 3) U_δ est un ensemble fermé et convexe

$\left(\text{car } U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\varphi(x) + \delta}_{\text{convexe + continue}} \leq 0\}\right)$

J_k est une fonction continue

J_k est coercive sur U_δ si U_δ est non-borné

(car $J_k \geq J$ sur U_δ et J coercive sur U_δ)

On déduit l'existence ~~d'un~~ de $x^{(k)} \in U_\delta$ tel que

(*3) $J(x^{(k)}) \leq J(y) \quad \forall y \in U_\delta$

Mais d'autre part $\overset{\text{de I c 2)}}{\sqrt{\ }}$ $J(x^{(k)}) \leq J(a) - \frac{1}{k\varphi(a)} \overset{\text{de I c 1)}}{\leq}$

$\leq \inf\limits_{z \in U - U_\delta} J_k(z) \leq J_k(y) \quad \forall y \in U - U_\delta$ (si $\delta > 0$ assez petit)

donc

(*4) $J(x^{(k)}) \leq J_k(y) \quad \forall\ y \in U - U_\delta$

De $(*3)$ et $(*4)$ on deduit
$J(x^{(k)}) \leq J(y), \quad \forall y \in U$
Comme $x^{(k)} \in U$ (car $U_\delta \subset U$)
ceci repond à la question.

I c 4) $\psi = A \circ \varphi$

avec $A :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ $\quad A(y) = -\frac{1}{y}$

Alors $\nabla \psi(x) = A'(\varphi(x)) \cdot \nabla \varphi(x)$ donc

$\nabla \psi(x) = \frac{\nabla \varphi(x)}{\varphi^2(x)}$ donc $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varphi^2(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$

Alors on a :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{1}{\varphi^2(x)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) - \frac{2}{\varphi^3(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$$

$\forall i, j = 1 \dots n$ ce qui donne bien

$$\nabla^2 \psi(x) = \frac{1}{\varphi^2(x)} \nabla^2 \varphi(x) - \frac{2}{\varphi^3(x)} \nabla \varphi(x) (\nabla \varphi(x))^T.$$

I c 5) $\forall x, y \in U$ on a

$$\langle \nabla^2 \psi(x)(y-x), y-x \rangle = \underbrace{\frac{1}{\varphi^2(x)}}_{> 0} \underbrace{\langle \nabla^2 \varphi(x)(y-x), y-x \rangle}_{\geq 0 \text{ par convexité de } \varphi}$$

$$- \underbrace{\frac{2}{\varphi^3(x)}}_{< 0 \text{ car } x \in U} \underbrace{\langle \nabla \varphi(x) (\nabla \varphi(x))^T (y-x), y-x \rangle}$$
$$= \underbrace{\langle (\nabla \varphi(x))^T (y-x), (\nabla \varphi(x))^T (y-x) \rangle}_{\geq 0}$$

Alors $\langle \nabla^2 \psi(x)(y-x), y-x \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in U$
ce qui nous donne que ψ est convexe.

Comme $J_k = J + \frac{1}{k} \psi$
$k \in \mathbb{N}^*$, ψ convexe sur U et J strictement convexe sur $\mathbb{R}^n$
alors J_k ~~es~~ strictement convexe.
~~Comme U est un ensemble convexe (la même preuve que pour montrer que U_0 est convexe~~
Montrons que U est convexe : si $x, y \in U$ et $t \in [0,1]$ alors
$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{\varphi(x)}_{< 0} + \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \underbrace{\varphi(y)}_{< 0} \leq 0$$

Mais soit t soit $1-t$ est > 0 ce qui donne $tx+(1-t)y \in U$

$\varphi(tx+(1-t)y) < 0$ donc

Ceci donne l'unicité de $x^{(k)}$ sur U (résultat vu en cours).

(I d) On a :

$J(x^{(k)}) \leq J_k(x^{(k)}) \leq J_k(a) = J(a) - \frac{1}{k\varphi(a)}$

(car $J_k \geqslant J$ sur U) (car $x^{(k)}$ = p. min de J_k sur U)

$\leq J(a) - \frac{1}{\varphi(a)}$ (car $k \geqslant 1$)

Donc $J(x^{(k)})$ borné supérieurement

Comme J est coercive alors $x^{(k)}$ bornée

(preuve vue en cours)

(I e) La preuve ressemble à une preuve vue en cours :

On peut extraire une sous-suite $x^{(k')}$ de $x^{(k)}$ tel que

$x^{(k')} \longrightarrow \bar{x}$ pour $k' \longrightarrow +\infty$, avec $\bar{x} \in U_0$

(car $x^{(k')} \in U_0$ et U_0 fermé)

On a : $\underbrace{J_{k'}(x^{(k')})}_{\geqslant J(x^{(k')})} \leq J_{k'}(y)$ $\forall y \in U$ donc

$J(x^{(k')}) \leq J(y) - \frac{1}{k\varphi(y)}$ $\forall y \in U$.

On fixe $y \in U$ et on fait $k' \to +\infty$. Par continuité de J $\Rightarrow$ $J(\bar{x}) \leq J(y)$ $\forall y \in U$.

Ceci donne $J(\bar{x}) \leq J(y)$ $\forall y \in U_0$ (continuité de J et le fait que tout élem de U_0 peut être approché par une suite élem. de U)

Alors $\bar{x} = x^*$ par unicité de x^*.

D'autre part, ~~...~~ montrons que toute la suite $x^{(k)}$ converge vers x^*.

Ceci c'est comme en cours : par absurd, si $\exists \varepsilon > 0$ tel que

(*) $\| x^{(k'')} - x^* \| \geqslant \varepsilon$ avec k'' sous-suite de k, on extrait une sous-suite $x^{(k''')}$ de $x^{(k'')}$ qui converge vers x^*

(comme avant). Ceci contredit (*)

Partie II.

II a) $\varphi(x) = \frac{1}{2} \langle 2I_2 x, x \rangle - 1$

$J(x) = \frac{1}{2} \langle 2I_2 x, x \rangle - \langle 4e_1, x \rangle$

Il est clair que φ et J sont elliptiques, ~~donc~~ car $2I_2$ est SDP, donc OK!

Ici $U = \{x : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ = disque ouvert centre 0 rayon 1 en $\mathbb{R}^2$

$V = \{x : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ = cercle centre 0 rayon 1 en $\mathbb{R}^2$

$U_\delta = \{x : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - \delta\}$ = disque fermé centre 0 et rayon $\sqrt{1-\delta}$ en $\mathbb{R}^2$ ($U_\delta \neq \emptyset$ ssi $\delta \in [0, 1]$; $U_\delta = \{0\}$ si $\delta = 1$)

On a toujours $U - U_\delta \neq \emptyset$ si $\delta > 0$.

II b) $U_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) \leq 0\}$

~~On monte~~ Comme φ convexe et $\exists y \in U_0$ $\varphi(y) < 0$ alors U_0 qualifié (on peut aussi montrer que U_0 est regulier). Soit x^* p. de min de J sur U_0

On a par KKT : $\exists p^* \geq 0$ tel que

$$\begin{cases} \nabla J(x^*) + p^* \nabla \varphi(x^*) = 0 \\ p^* \varphi(x^*) = 0 \\ p^* \geq 0 \\ \varphi(x^*) \leq 0 \end{cases}$$

Ceci donne (utilisons (x, p) à la place de (x^*, p^*) :)

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \text{(ii)} & \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ \text{(iii)} & p(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ \text{(iv)} & p \geq 0 \\ \text{(v)} & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{cases}$$

Cas 1. Si $p = 0$ alors de (i) et (ii) $\Rightarrow$ $x_1 = 2$ et $x_2 = 0$ ne convient pas de (v).

Cas 2. Si $p > 0$ alors $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (de (iii))

On a alors de (i), (ii) :

$2x_2\underbrace{(1+p)}_{>1}=0$ ce qui donne $x_2=0$

On obtient de (i) :

$2(1+p)\,x_1=4$ donc $x_1=\frac{2}{1+p}$ (car $x_2=0$)

Comme on doit avoir $x_1^2 = 1$

alors $\frac{4}{(1+p)^2}=1 \iff (1+p)^2=4 \iff p+1=\pm 2 \iff p=1$ ou $p=-3$

Comme $p>1$ on a $p=1$ donc $x_1=1$

La solution est alors

$x^*=(1,0)^T$ et $p^*=1$

II a) Comme J_K est de classe C^1 sur U et U est ouvert alors $x^{(K)}$ satisfait

$\nabla J_K(x^{(K)})=0$. On va noter $y=x^{(K)}$, donc

$\nabla J(y)+\frac{\nabla\varphi(y)}{K\varphi^2(y)}=0$

Ceci donne

$$\begin{cases} 2y_1-4+\dfrac{2y_1}{k(y_1^2+y_2^2-1)^2}=0 \\ \text{et} \\ 2y_2+\dfrac{2y_2}{k(y_1^2+y_2^2-1)^2}=0 \end{cases}$$

La deuxième equation donne

$y_2=0$

(car $2+\frac{2}{k(y_1^2+y_2^2-1)^2}>0$ $\forall y\in U$) $\Rightarrow$

On remplace dans la premiere équation

$f(y_1)=0$ et $y_2=0$ alors $y_1\in\,]-1,1[$

Comme $y_1^2+y_2^2<1$ est unique car $y\equiv x^{(K)}$ est

La racine de f sur $]-1,1[$ est unique

II d) Prendre $(\eta_k^2-1)^2 = \frac{1}{\sqrt{k}}$ $\iff$ $\eta_k^2 - 1 = \pm \frac{1}{k^{1/4}}$

$\iff$ $\eta_k^2 = 1 \pm \frac{1}{k^{1/4}}$. Comme on veut $\eta_k^2 \leq 1$ prendre "$-$"

Alors $\eta_k^2 = 1 - \frac{1}{k^{1/4}}$ donc $\eta_k = \sqrt{1 - \frac{1}{k^{1/4}}}$ (car $\eta_k > 0$)

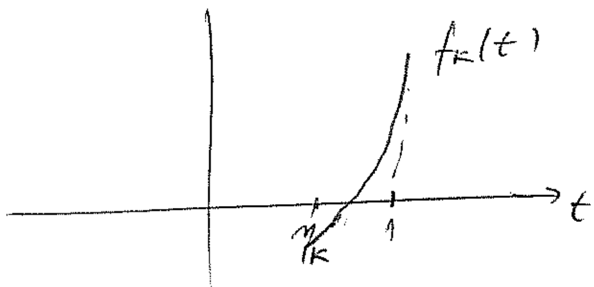
Alors $f_k(\eta_k) = 2\eta_k - 4 + \frac{2\eta_k}{k \frac{1}{\sqrt{k}}} = 2\eta_k - 4 + \frac{2\eta_k}{\sqrt{k}}$

Comme $\eta_k \to 1$ pour $k \to +\infty$ alors

$f_k(\eta_k) \to -2$ pour $k \to \infty$

Donc $f_k(\eta_k) < 0$ si k assez grand

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{t \to 1 \\ t < 1}} f_k(t) = +\infty$



Alors la racine de f se trouve entre η_k et 1 si k assez grand

$\eta_k < x_1^{(k)} < 1$

Si on fait $k \to +\infty$ alors $x_1^{(k)} \to 1$

Alors $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, 0)^T \to (1, 0) = x^*$ pour $k \to +\infty$