Corrigé Partiel Optimisation M1 SITN 2013

Problème 1.

a) On se donne $x^{(k)} = (x_1^{(k)} \dots x_n^{(k)})$ et on doit trouver $x^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)} \dots x_n^{(k+1)})$ en n pas successifs.
Pour tout $i \in \{1, 2 \dots n\}$ si on a trouvé $x_1^{(k+1)} \dots x_{i-1}^{(k+1)}$ alors $x_i^{(k+1)}$ satisfait:

$$J(x_1^{(k+1)}, \dots x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)} \dots x_n^{(k)}) =$$
$$= \min_{Y \in \mathbb{R}} \underbrace{J(x_1^{(k+1)} \dots x_{i-1}^{(k+1)}, Y, x_{i+1}^{(k)} \dots x_n^{(k)})}_{\text{noter } g_i(Y)}.$$

(C0) On va noter $a_j = x_j^{(k+1)}$ si $j \leq i-1$
$a_j = x_j^{(k)}$ si $j \geq i+1$

On cherche $Y^* \in \mathbb{R}$ tel que $g_i'(Y^*) = 0$, c'est à dire

$$\frac{\partial J}{\partial x_i}(a_1, a_2 \dots a_{i-1}, Y^*, a_{i+1} \dots a_n) = 0$$

Mais $\frac{\partial J}{\partial x_i}(x_1 \dots x_n) = (x_i - x_{i-1})^3 + (x_i - x_{i+1})^3 + 2x_i - 2b_i$ où on pose $x_0 = x_{n+1} = 0$.
si $i = 1, 2 \dots n$

Alors $g_i'(Y) = (Y - a_{i-1})^3 + (Y - a_{i+1})^3 + 2Y - 2b_i$ avec $a_0 = a_{n+1} = 0$

On utilise Indication 2: faire $Y = Z + \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}$

Il faut alors résoudre l'équation en Z:

$$\left(Z + \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2}\right)^3 + \left(Z - \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2}\right)^3 + 2Z + \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2} - 2b_i = 0.$$

En développant, ceci donne

$$2Z^3 + \frac{3}{2}(a_{i+1} - a_{i-1})^2 Z + 2Z + \frac{a_{i+1} + a_{i-1}}{2} - 2b_i = 0$$

c'est à dire

$$Z^3 + \alpha_i Z + \beta_i = 0 \quad \text{avec}$$

(C1) $\alpha_i = 1 + \frac{3}{4}(a_{i+1} - a_{i-1})^2$

(C2) $\beta_i = \frac{a_{i+1} + a_{i-1}}{4} - b_i$

On utilise Indication 1. On a

(C3) $\Delta_i = \beta_i^2 + \frac{4}{27}\alpha_i^3$

avec α_i, β_i données par (C1), (C2)

Comme $\alpha_i > 0$ alors $\Delta_i > 0$.

On a alors

$$z = \left(\frac{-\beta_i + \sqrt{\Delta_i}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{-\beta_i - \sqrt{\Delta_i}}{2}\right)^{1/3}$$

donc en revenant en y, la solution recherchée est

(C4) $$y^* = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2} + \left(\frac{-\beta_i + \sqrt{\Delta_i}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{-\beta_i - \sqrt{\Delta_i}}{2}\right)^{1/3}$$

avec $a_1 \dots a_n$ données par (C0), $\alpha_i, \beta_i, \Delta_i$ données par (C1), (C2), (C3) et $a_0 = a_{n+1} = 0$

Ce y^* trouvé en (C4) est en fait $u_i^{(k+1)}$

b) D'abord $i = 1$; alors $a_0 = a_2 = a_3 = 0$ et de (C1), (C2) on trouve $\alpha_1 = 1$; $\beta_1 = 0$, donc

$\Delta_1 = \frac{4}{27}$. Ceci nous donne

$$u_1^{(1)} = 0 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{27}}\right)^{1/3} + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{27}}\right)^{1/3} = 0$$

(en fait il faut résoudre $2y^3 + 2y = 0$, donc l'unique solution est $y = 0$)

Pour $i = 2$; alors $a_0 = a_1 = a_3 = 0$ donc (C1), (C2), (C3) donnent

$\alpha_2 = 1$; $\beta_2 = -1$, $\Delta_2 = 1 + \frac{4}{27} = \frac{31}{27}$.

Alors

$$u_2^{(1)} = \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{1 - \sqrt{\frac{31}{27}}}{2}\right)^{1/3}$$

Problème 2.

a) C'est évident, U est donné par des inégalités larges

~~$U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^3)$~~ avec $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_1(x) = x_1$ $\quad \varphi$ continue.

$U = \varphi^{-1}([0,\infty[^3)$ $\quad \varphi_2(x) = x_2$

$\varphi_3(x) = x_1 - x_2$

b) b1) Si $x \in U$ alors $ax \in U$?

$ax_1 \geq 0$; $0 \leq a x_2 \leq a x_1$, donc OK!

b2) Si $x, y \in U$ alors $x + y \in U$?

$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ y_1 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + y_1 \geq 0$; $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x_2 \leq x_1 \\ 0 \leq y_2 \leq y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq x_2 + y_2 \leq x_1 + y_1$

donc OK!

c) Si $t \in [0,1]$, $x \in U$, $y \in U$ alors

$tx \in U$ et $(1-t)y \in U$ (par b1))

donc $tx + (1-t)y \in U$ par b2)) donc OK!

d) $(3) \Rightarrow (4)$

~~Prendre~~ Pour ~~tout~~ $y \in U$ arbitraire prendre $x = \underbrace{x^* + y}_{\in U \text{ par } b2)}$ dans (3)

Alors on obtient $(4)_1$

Prendre en (3) $x = \underbrace{2x^*}_{\in U}$ par b1) $\Rightarrow \langle \nabla f(x^*), x^* \rangle \geq 0$

Prendre en (3) $x = 0_{\in U}$ $\Rightarrow \langle \nabla f(x^*), x^* \rangle \leq 0$

donc $(4)_2$.

$(4) \Rightarrow (3)$

Faire la différence entre $(4)_1$ et $(4)_2$: $\forall y \in U$ donc (3).

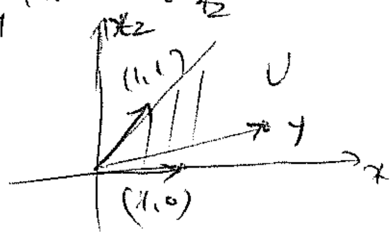
$\langle \nabla J(x^*), y - x^* \rangle \geq 0$

e) $(5) \Rightarrow (6)$

Prendre $y = (1,0) \in U$ en (5) $\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) \geq 0$

Prendre $y = (1,1) \in U$ en (5) $\Rightarrow \frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) + \frac{\partial J}{\partial x_2}(x^*) \geq 0$

donc (6).



$(6) \Rightarrow (5)$

Observer que pour tout $y \in U$

il existe $\alpha, \beta \geq 0$ tels que

$y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(en fait il faut $\begin{cases} \alpha+\beta = y_1 \\ \beta = y_2 \end{cases}$ donc OK ! avec $\beta = y_2 \geq 0$, $\alpha = y_1 - y_2 \geq 0$)

Mais (6) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \langle \nabla J(x^*), \binom{1}{0} \rangle \geq 0 & \cdot\, \alpha \\ \langle \nabla J(x^*), \binom{1}{1} \rangle \geq 0 & \cdot\, \beta \end{cases}$ et somme $\Rightarrow$ (5)

f) (4) $\Rightarrow$ (7)

On a vu en e) que si $(4)_1$ est vraie alors $(7)_1$ et $(7)_2$ sont vraies.

~~Supposons~~ Comme $(4)_2$ est vraie ~~donc~~ alors

$$\underbrace{\frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*)}_{\geq 0 \text{ de } (7)_1}\underbrace{(x_1^* - x_2^*)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } x^* \in U}} + \underbrace{x_2^*}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } x^* \in U}}\underbrace{\left[\frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) + \frac{\partial J}{\partial x_2}(x^*)\right]}_{\geq 0 \text{ de } (7)_2} = 0$$

Donc une somme de 2 termes ≥ 0 est $= 0$ donc chacun est $= 0$

Ceci donne $(7)_3$ et $(7)_4$.

(7) $\Rightarrow$ (4)

$(7)_1$ et $(7)_2$ $\Rightarrow$ $(4)_1$ [vu en e)]

$(7)_3$ et $(7)_4$ $\Rightarrow$ $\langle \nabla J(x^*), x^* \rangle = 0$ donc $(4)_2$. donc OK !

g) $J(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ avec $A = 2I_2$, $b = \binom{0}{2}$

Comme A est SDP alors J elliptique, U convexe et fermé $\Rightarrow$ $\exists$ et ! point de min de J sur U.

On note x^* ce point de minimum.

Donc x^* satisfait (7). $\nabla J(x) = 2x - b = \binom{2x_1}{2x_2 - 2}$

Alors (7) devient ici (on note x à la place de x^* pour simplicité)
$$\begin{cases} 2x_1 \geq 0 & (i) \\ 2(x_1 + x_2 - 1) \geq 0 & (ii) \\ 2(x_1 - x_2)\, x_1 = 0 & (iii) \\ 2x_2(x_1 + x_2 - 1) = 0 & (iv) \\ \text{avec aussi } 0 \leq x_2 \leq x_1 \text{ car } x \in U & (v) \end{cases}$$

Possibilités pour avoir (iii) et (iv) :

<u>Cas 1.</u> $x_1 = x_2 = 0$ impossible par (ii)

<u>Cas 2.</u> $x_1 = 0$ et $x_1 + x_2 - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $x_2 = 1$. non $x \notin U$

<u>Cas 3.</u> $x_1 - x_2 = 0$ et $x_2 = 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = x_2 = 0$ non de (ii)

<u>Cas 4.</u> $x_1 - x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_1 = x_2 = \frac{1}{2}} \in U$ c'est la solution !

$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$