Master M1 SITN, 2012-2013

Examen - Optimisation

Durée 3h - Notes de cours autorisées

Problème (Un cas particulier de **pénalisation intérieure**)

Partie I

On se donne $n \in I\!N$ avec $n \geq 2$ et deux fonctions $\varphi, J : I\!R^n \to I\!R$. On suppose que φ est de classe C^2 et convexe et que J est une fonction elliptique. On considère les ensembles

$$U = \{x \in I\!R^n,\ \varphi(x) < 0\}$$

et

$$V = \{x \in I\!R^n,\ \varphi(x) = 0\}$$

et on suppose que $U \neq \emptyset$ et $V \neq \emptyset$. Pour tout $\delta \geq 0$ on introduit l'ensemble

$$U_\delta = \{x \in I\!R^n,\ \varphi(x) \leq -\delta\}$$

(remarquer qu'on a $U \subset U_0$ donc $U_0 \neq \emptyset$). Soit $a \in U$ fixé et posons $\delta_0 = -\varphi(a)$.

D'autre part, pour tout $k \in I\!N^*$ on introduit la fonction $J_k : U \to I\!R$ définie par

$$J_k(x) = J(x) - \frac{1}{k\varphi(x)}, \quad \forall\, x \in U.$$

Ia) Montrer que J admet un unique point de minimum sur U_0.
(Dans la suite du problème nous notons par x^* ce point de minimum).

Ib) Montrer que pour tout $\delta \in [0, \delta_0]$ on a $U_\delta \neq \emptyset$ et aussi $U - U_\delta \neq \emptyset$.
Indication pour montrer $U - U_\delta \neq \emptyset$: fixer un élément $y \in V$ et chercher un élément de $U - U_\delta$ dans l'intersection entre le segment $[a, y]$ et un boule centrée en y et de rayon convenablement petit.

Ic) On se propose de montrer ici que pour tout $k \in I\!N^*$ le problème de minimisation sur U:

$$(1) \qquad \text{Trouver} \quad x^{(k)} \in U \quad \text{tel que} \qquad J_k(x^{(k)}) \leq J_k(y) \quad \forall\, y \in U$$

admet une solution et une seule (remarquer que la difficulté du problème vient du fait que l'ensemble U est ouvert).

Ic1) Montrer que pour tout $k \in I\!N^*$ fixé on a

$$\inf_{y \in U - U_\delta} J_k(y) \to +\infty \quad \text{pour } \delta \to 0,\ \delta > 0.$$

Indication: minorer J_k sur $U - U_\delta$ par une constante appropriée, indépendante de y mais dépendante de k et δ.

Ic2) Montrer que pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$ on a

$$\inf_{y \in U_\delta} J_k(y) \leq J(a) - \frac{1}{k\varphi(a)}.$$

Ic3) Montrer que J_k est continue sur U. En supposant que $\delta > 0$ est tel que U_δ est non borné, montrer que J_k est coercive sur U_δ.

Ic4) En déduire l'existence d'au moins une solution $x^{(k)}$ du problème d'optimisation (1), pour tout $k \in I\!N^*$.
Indication: commencer par montrer l'existence d'au moins un point de minimum de J_k sur U_δ avec $\delta > 0$ assez petit.

Ic5) Considérons la fonction $\psi : U \to I\!R$ définie par $\psi(x) = -\frac{1}{\varphi(x)} \quad \forall\, x \in U$. Montrer que ψ est de classe C^2 avec en plus

$$\nabla^2\psi(x) = \frac{1}{\varphi^2(x)}\nabla^2\varphi(x) - \frac{2}{\varphi^3(x)}\nabla\varphi(x)(\nabla\varphi(x))^T \quad \forall\, x \in U.$$

Ic6) Montrer que ψ est convexe sur U et en déduire l'unicité de la solution du problème d'optimisation (1).

Id) Montrer que la suite $J(x^{(k)})$ est bornée supérieurement et en déduire que la suite $x^{(k)}$ est bornée.

Ie) Montrer que la suite $x^{(k)}$ converge vers x^* pour $k \to +\infty$.

Partie II: Application

On considère dans cette partie $n = 2$, $\quad \varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, $\quad J(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 \quad \forall\, (x_1, x_2) \in I\!R^2$.

IIa) Montrer que toutes les hypothèses de la **Partie I** sont satisfaites par φ et J. Qui sont U, V et U_δ ($\delta \geq 0$) dans ce cas? Pour quels $\delta \geq 0$ a-t-on $U_\delta \neq \emptyset$ et $U - U_\delta \neq \emptyset$?

IIb) Trouver la solution x^* du problème de minimisation de J sur U_0 dans ce cas.

IIc) Pour $k \in I\!N^*$ écrire le problème satisfait par la solution $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right)^T$ de (1). Trouver $x_2^{(k)}$ et montrer ensuite que $x_1^{(k)}$ est l'unique solution sur l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ de l'équation $f_k(x_1^{(k)}) = 0$ où $f_k : I \to I\!R$ est la fonction définie par

$$f_k(t) = 2t - 4 + \frac{2t}{k(t^2-1)^2} \quad \forall\, t \in I.$$

IId) Soit $\eta_k \in]0, 1[$ tel que $(\eta_k^2 - 1)^2 = \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour $k \in I\!N$, $k \geq 2$. Montrer qu'on a $\eta_k < x_1^{(k)} < 1$ pour k assez grand. En déduire que $x^{(k)} \to x^*$ pour $k \to +\infty$.