Département de Mathématiques   Master M1 SITN,   2012-2013

Partiel - Optimisation

Durée 2h - Notes de cours autorisées

Problème 1.

Soient $n \in I\!N^*$ et $b \in I\!R^n$.

a) Ecrire l'algorithme de **relaxation** pour la minimisation de la fonction $J : I\!R^n \to I\!R$ donnée par

$$J(x) = \frac{1}{4}x_1^4 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k+1})^4 + \frac{1}{4}x_n^4 + \|x\|^2 - 2 < b, x > .$$

b) Cas particulier: on suppose ici $n = 2$ et $b = (0,1)^T$. En prennant $u^{(0)} = (0,0)^T$ comme point initial dans l'algorithme de relaxation, trouver $u^{(1)}$.

Indication 1. *On admet le résultat suivant (formule de Cardan):*
On considère l'équation scalaire: trouver $x \in I\!R$ tel que

$$x^3 + \alpha x + \beta = 0 \tag{1}$$

avec α, β des paramètres réels. On définit le discriminant de (1) par la formule $\Delta = \beta^2 + \frac{4}{27}\alpha^3$ et on suppose que $\Delta > 0$. Alors l'équation (1) admet une solution unique x^* donnée par

$$x^* = \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3}.$$

Indication 2. *Considérons l'équation scalaire: trouver $y \in I\!R$ tel que*

$$(y-a)^3 + (y-b)^3 + cy + d = 0 \tag{2}$$

avec a, b, c, d des paramètres réels. Afin de résoudre facilement cette équation faire le changement d'inconnue $y = x + \frac{a+b}{2}$ et remarquer que la nouvelle inconnue x satisfait une équation du type (1).

Problème 2.

On considère l'ensemble

$$U = \{(x_1, x_2) \in I\!R^2,\ x_1 \geq 0,\ 0 \leq x_2 \leq x_1\}$$

et $J : I\!R^2 \to I\!R$ une fonction de classe C^1.

a) *Montrer que U est un ensemble fermé.*

b) *Montrer les propriétés suivantes:*

b1) pour tout $a \geq 0$ et $x \in U$ on a $ax \in U$,

b2) pour tous $x, y \in U$ on a $x + y \in U$.

(un ensemble ayant la propriété b1) est appelé cône dans l'espace vectoriel $I\!R^2$).

c) *En déduire que U est un ensemble convexe.*

d) *Montrer que pour tout $x^* \in U$ la condition d'optimalité (l'inéquation d'Euler):*

$$< \nabla J(x^*), x - x^* > \ \geq 0, \quad \forall\, x \in U \tag{3}$$

est équivalente au système

$$(4) \qquad \begin{cases} < \nabla J(x^*), y > \geq 0, \quad \forall\, y \in U \\ < \nabla J(x^*), x^* > = 0. \end{cases}$$

e) *Montrer l'équivalence entre l'inégalité variationnelle*

$$(5) \qquad < \nabla J(x^*), y > \geq 0, \quad \forall\, y \in U$$

et la double inégalité

$$(6) \qquad \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) \ \geq 0 \\ \\ \frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) + \frac{\partial J}{\partial x_2}(x^*) \ \geq 0. \end{cases}$$

Indication: Observer que $\frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*)$ *s'écrit comme le produit scalaire entre* $\nabla J(x^*)$ *et un vecteur de* U *à préciser; de même pour* $\frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) + \frac{\partial J}{\partial x_2}(x^*)$.

f) *En écrivant* $< \nabla J(x^*), x^* > = \frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*)(x_1^* - x_2^*) + x_2^* \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) + \frac{\partial J}{\partial x_2}(x^*) \right)$ *montrer que pour tout* $x^* = (x_1^*, x_2^*)^T \in U$ *le système* (4) *est équivalent au système*

$$(7) \qquad \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) \ \geq 0 \\ \\ \frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) + \frac{\partial J}{\partial x_2}(x^*) \ \geq 0 \\ \\ (x_1^* - x_2^*) \frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) = 0 \\ \\ x_2^* \left(\frac{\partial J}{\partial x_1}(x^*) + \frac{\partial J}{\partial x_2}(x^*) \right). \end{cases}$$

g) Cas particulier: *Soit* J *donnée par*

$$J(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \quad \forall\, (x_1, x_2) \in I\!R^2.$$

Montrer l'existence et l'unicité d'un point de minimum de J *sur* U. *En utilisant les questions précédentes trouver ce point de minimum.*