

# COURS METHODES MATHEMATIQUES POUR L'INGENIEUR

*MAM 3, Polytech Lyon, 2022-2023*

Ionel Sorin CIUPERCA

Le cours s'adresse en principal à des élèves des écoles d'ingénieurs, filière mathématique appliquées et modélisation.

Le but de ce cours est d'introduire plusieurs outils et concepts mathématiques de base qui serviront dans tous les autres cours de la filière.

Dans ce polycopié il y a assez peu d'exemples ; la plupart des exemples seront donnés en classe.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Une brève introduction à la théorie de la mesure et de l'intégration par rapport à une mesure</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction et motivation . . . . .	4
1.2	Quelques rappels et notations . . . . .	6
1.3	La notion de mesure ; cas particulier de la mesure de Lebesgue . . . . .	11
1.4	L'intégrale par rapport à une mesure et le cas particulier de l'intégrale de Lebesgue . . . . .	18
1.5	Les espaces de Lebesgue . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Quelques éléments de géométrie analytique : courbes et surfaces</b>	<b>37</b>
2.1	Courbe paramétrée et intégrale sur une courbe . . . . .	37
2.1.1	Paramétrisations et courbes . . . . .	37
2.1.2	Courbes de classe $C^1$ par morceaux . . . . .	42
2.1.3	Intégrales sur des courbes . . . . .	43
2.2	Nappes paramétrées et surfaces . . . . .	45
2.2.1	Quelques rappels d'analyse et d'algèbre . . . . .	45
2.2.2	Définitions et exemples de nappes paramétrées . . . . .	46
2.2.3	Plan tangent et normale à une surface . . . . .	48
2.2.4	Surfaces de classe $C^1$ par morceaux . . . . .	51
2.2.5	Intégrales sur des surfaces . . . . .	51
2.3	Formules de passage d'un type d'intégrale à un autre ; formules de Green . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Transformée de Laplace et de Fourier</b>	<b>57</b>
3.1	Fonctions complexes de variables complexes . . . . .	57
3.1.1	Quelques rappels . . . . .	57
3.1.2	Fonctions holomorphes . . . . .	58
3.2	Transformée de Laplace (TL) . . . . .	62
3.2.1	Définition de la transformée de Laplace . . . . .	62
3.2.2	Transformée de Laplace et dérivation . . . . .	68
3.2.3	Transformée de Laplace et convolution . . . . .	69
3.2.4	Formule d'inversion, unicité et applications . . . . .	72
3.2.5	La transformée de Fourier comme cas particulier de la transformée de Laplace . . . . .	73

<b>4</b>	<b>La théorie des distributions.</b>	<b>76</b>
4.1	Introduction . . . . .	76
4.2	L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions test . . . . .	78
4.3	La notion de distribution . . . . .	82
4.4	Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ . . . . .	86
4.5	Dérivation des distributions . . . . .	88
4.6	Produit entre une fonction $C^\infty$ et une distribution . . . . .	92
4.7	Une brève introduction aux espaces de Sobolev . . . . .	94

# Chapitre 1

## Une brève introduction à la théorie de la mesure et de l'intégration par rapport à une mesure

### 1.1 Introduction et motivation

#### Rappel sur l'intégrale de Riemann

En 1820 Cauchy démontre que si une fonction  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  est continue, avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $a < b$ , alors la limite suivante existe :

$$I(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} h \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)$$

où  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_k = a + kh$  pour  $k = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $h = \frac{b-a}{N}$ .

Ce nombre réel  $I(f)$  n'est autre que  $\int_a^b f(x)dx$ .

En 1854 Riemann introduit le concept général d'*intégrale de Riemann* :

On dit que  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  est **intégrable Riemann** s'il existe  $I(f) \in \mathbb{R}$  (qui sera en fait  $\int_a^b f(x)dx$ ) tel que :

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tel que pour toute sous-division  $x_0, x_1, \dots, x_N$  de  $[a, b]$  avec  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  et  $\max_{j=0,1,\dots,N-1} (x_{j+1} - x_j) \leq \delta$  et pour tous  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1}$  avec  $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$  on a

$$|I(f) - \sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)| \leq \epsilon.$$

Riemann démontre que toute fonction continue est intégrable (au sens de Riemann), mais qu'il existe aussi des fonctions non continues qui sont intégrables dans ce sens (par exemple des fonctions continues par morceaux).

**Remarque :** le concept peut se généraliser à des fonctions définies sur des ensembles dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 2$ .

### Les inconvénients de l'intégrale de Riemann :

1. On démontre que toute fonction intégrable Riemann est bornée. Pourtant on utilise souvent des intégrales comme  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ . On ne peut pas définir une telle intégrale en utilisant la définition vue ci-dessus car la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  n'est pas bornée (donc elle n'est pas intégrable) sur  $]0, 1]$ . On doit faire alors une extension "artificielle" de la définition. Pour ce cas on définira  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  par l'égalité

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

ce qui donne

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2.$$

On procède de manière analogue pour définir l'intégrale sur un domaine non borné.

2. Considérons la fonction suivante (appelée fonction de Dirichlet) :

$f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

où  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des nombres rationnels.

On voit facilement que cette fonction n'est pas intégrable au sens de Riemann (car pour toute sous division  $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$  on peut choisir d'abord  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1} \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$  ce qui donne  $\sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = 1$  et ensuite  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{N-1} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  ce qui donne  $\sum_{j=0}^{N-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) = 0$ , donc contradiction).

D'autre part,  $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$  est *négligeable* car *dénombrable*, alors "c'est comme si  $f \equiv 1$ ".

On voudrait alors dire :  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1$ .

3. Il est difficile de passer à la limite sous l'intégrale. Il faut des hypothèses fortes de convergence uniforme.

### Une présentation "intuitive" de l'intégrale de Lebesgue.

En 1902 H. Lebesgue utilise une idée différente pour définir  $\int_a^b f(x) dx$  pour une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Nous présentons l'idée pour le cas  $f \geq 0$  et nous renvoyons à la Section 1.4 pour le cas général.

Considérons  $N \in \mathbb{N}^*$  un nombre "grand" et une division

$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{N-1} < y_N$  de l'intervalle  $[0, +\infty[$  avec  $y_j - y_{j-1}$  "petite" pour tous  $j = 1, 2, \dots, N$  et  $y_N$  "grande" (par exemple on peut prendre  $N = p^2$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $p \rightarrow \infty$ ,  $y_j = \frac{j}{p}$  pour  $j = 0, 1, \dots, p^2$ ).

On définit alors (quand elle existe)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[ \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \text{"mesure}(f^{-1}([y_j, y_{j+1}]))" + y_N \cdot \text{"mesure}(f^{-1}([y_N, +\infty]))" \right]$$

où on définit pour un ensemble  $A \subset \mathbb{R}$  :

$$f^{-1}(A) = \{x \in [a, b], f(x) \in A\}.$$

On n'a pas besoin que l'ensemble de définition de  $f$  soit un intervalle borné et on n'a pas besoin non plus que  $f$  soit bornée. En plus cette idée de définition peut s'étendre à des fonctions de plusieurs variables. Il reste encore à définir de manière rigoureuse la "mesure" d'un ensemble : c'est l'objet de la Section 1.3.

## 1.2 Quelques rappels et notations

Dans tout ce cours  $n$  désigne un nombre naturel non nul ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) et nous notons par  $\mathbb{R}^n$  l'espace euclidien défini par  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$  ( $n$  fois).

Nous notons aussi par  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes

$$\mathbb{C} = \{x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

avec  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .

Nous notons par  $\mathbb{K}$  soit l'ensemble  $\mathbb{R}$  soit  $\mathbb{C}$ .

1. En général un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  sera noté  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  (vecteur colonne).
2. Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$  on note par  $\langle x, y \rangle$  ou  $\langle x, y \rangle$  ou par  $x \cdot y$  le **produit scalaire** de  $x$  et  $y$ , qui est le nombre réel donné par

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on note par  $\|x\| \geq 0$  la **norme euclidienne** de  $x$ , donnée par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

4. Pour tous  $i, j \in \mathbb{Z}$  on notera  $\delta_{ij}$  les **symboles de Kronecker** données par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

5. On notera par  $e_1, e_2, \dots, e_n$  les vecteurs de la **base canonique** de  $\mathbb{K}^n$ , c'est à dire

$$(e_i)_j = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

6. Pour tous  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$  on notera par  $B(x, r)$  la **boule ouverte** du centre  $x$  et rayon  $r$ , donnée par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y - x\| < r\}.$$

**Remarque :** si  $n = 1$  alors  $B(x, r) = ]x - r, x + r[$ .

7. Si  $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite dans  $\mathbb{R}^n$  et  $x$  est un élément de  $\mathbb{R}^n$  on dit que  $x^{(k)}$  **converge** vers  $x$  (notée  $x^{(k)} \rightarrow x$ ) si  $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$ .

Rappelons que nous avons :  $x^{(k)} \rightarrow x$  si et seulement si  $x_i^{(k)} \rightarrow x_i$  en  $\mathbb{R}$  où  $x_i^{(k)}$  (respectivement  $x_i$ ) est la  $i$ -ème composante de  $x^{(k)}$  (respectivement  $x$ ).

8. Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble non vide. On appelle **intérieur** de  $A$  noté  $\overset{\circ}{A}$  l'ensemble des  $x \in A$  pour lesquels il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ .

**Remarques :**

- On a toujours  $\overset{\circ}{A} \subset A$

- L'intérieur d'un ensemble peut être vide.

9. On dit qu'un ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est **ouvert** si pour tout  $x \in \Omega$  il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset \Omega$ .

(Définition équivalente :  $\Omega$  est ouvert si  $\overset{\circ}{\Omega} = \Omega$ ).

*Exemples :*

**Dans toute la suite de ce cours  $\Omega$  va désigner un sous-ensemble ouvert non-vide de  $\mathbb{R}^n$ .**

10. On dit qu'un ensemble  $F \subset \mathbb{R}^n$  est **fermé** si son complémentaire est ouvert (donc si  $\mathbb{R}^n \setminus F$  est ouvert).

Rappelons la caractérisation suivante : un ensemble  $F \subset \mathbb{R}^n$  est fermé si pour toute suite  $\{x^{(k)}\} \subset F$  tel que  $x^{(k)} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$  on a  $x \in F$ .

On prend souvent cette caractérisation comme définition d'un ensemble fermé.

*Exemples :*

11. On dit qu'un ensemble  $F \subset \mathbb{R}^n$  est **compact** si de toute suite de  $F$  on peut extraire une sous-suite convergente vers une limite de  $F$ .

On a la caractérisation suivante :  $F \subset \mathbb{R}^n$  est compact si et seulement si  $F$  est fermé et borné.

**Remarque :** La notion de compacité s'étend à d'autres espaces que  $\mathbb{R}^n$ . Dans un espace infini dimensionnel on n'a pas l'équivalence

$$\text{compact} \iff \text{fermé et borné.}$$

12. Pour un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  on appelle **adhérence** de  $A$  (notée  $\overline{A}$ ) le plus petit sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^n$  qui contient  $A$ . Rappelons qu'on a

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n, \exists \{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ suite } \subset A \text{ telle que } x^{(k)} \mapsto x \text{ pour } k \mapsto +\infty\}$$

*Exemples :*

Rappelons aussi les propriétés suivantes :

- $A \subset \overline{A}$
- $A$  est fermé si et seulement si  $\overline{A} = A$
- Si  $A \subset B$  alors  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .

13. Pour tout ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  on appelle **frontière** de  $A$  notée  $\partial A$  l'ensemble  $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .
14. Soient  $A, B, A_1$  des ensembles tels que  $A_1 \subset A$  et soit  $f : A \rightarrow B$  une fonction. On appelle **restriction** de  $f$  à  $A_1$  notée  $f|_{A_1}$  la fonction  $f|_{A_1} : A_1 \rightarrow B$  définie par :  $f|_{A_1}(x) = f(x), \forall x \in A_1$ .
15. Soient  $A_1, A, B$  des ensembles avec  $A_1 \subset A$  et  $f_1 : A_1 \rightarrow B$  une fonction. On dit qu'une fonction  $f : A \rightarrow B$  est une **extension** ou un **prolongement** de  $f_1$  sur  $A$  si  $f|_{A_1} = f_1$ .
16. **Rappel continuité** : Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble non-vidé et  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction. On dit que  $f$  est **continue** en  $x \in A$  si pour toute suite  $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A$  qui converge vers  $x$  on a que  $f(x^{(k)})$  converge vers  $f(x)$ . On dit que  $f$  est continue sur  $A$  si  $f$  est continue en tout point  $x$  de  $A$ .
17. Soient  $A, B$  des ensembles non-vides avec  $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue. On dit que  $f$  s'étend (ou se prolonge) par continuité sur  $B$  s'il existe une fonction continue  $g : B \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $g|_A = f$  (autrement dit : il existe une extension continue de  $f$  sur  $B$ ).
18. **Rappel dérivées partielles à l'ordre 1**.  
Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert non-vidé et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction.  
Pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  on note (quand  $\exists$ )

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x + te_j) - f(x)] \in \mathbb{K}$$

où  $e_j$  est le  $j$ -ème élément de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

C'est la **dérivée partielle** de  $f$  en  $x$  par rapport à la variable  $x_j$ .

Ceci revient à dériver uniquement par rapport à la variable  $x_j$  en fixant toutes les autres variables.

En particulier, si  $n = 1$  on note

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x+t) - f(x)] = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{y-x} [f(y) - f(x)].$$

**Remarque** : Il y a une manière équivalente de définir  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$  pour  $n \geq 2$  : on considère un intervalle ouvert  $I_j$  dans  $\mathbb{R}$  avec  $x_j \in I_j$  et tel que  $\{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_{j-1}\} \times I_j \times \{x_{j+1}\} \times \dots \times \{x_n\} \subset \Omega$ . On introduit ensuite la fonction d'une seule variable  $f_j : I_j \rightarrow \mathbb{K}$  définie par

$$f_j(y) = f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad \forall y \in I_j.$$



(on fait varier uniquement la  $j$ -ème variable et on fixe toutes les autres). Alors on a :  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f'_j(x_j)$  (quand  $\exists$ ). C'est la méthode qui est utilisée en général dans la pratique pour calculer une dérivée partielle.

*Exemple : en classe*

**Rappel dérivées partielles à l'ordre quelconque.**

Pour tout  $x \in \Omega$  et  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  on note (quand  $\exists$ )

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) (x) \in \mathbb{K}$$

dérivée partielle à l'ordre 2.

**Notation :** pour  $j = k$  on écrira  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x)$  à la place de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x)$ .

Evidemment, si  $n = 1$  on n'a qu'une seule dérivée partielle à l'ordre 2, qui est notée  $f''(x) = (f')'(x)$ .

Plus généralement, on définit par récurrence la dérivée à un ordre quelconque ; pour un élément  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  on définit  $D^\alpha f$  la dérivée partielle à l'ordre  $\alpha$  de  $f$  définie (quand elle existe) par

$$\begin{aligned} D^\alpha f &= f && \text{si } \alpha = (0, \dots, 0) \\ D^\alpha f &= \frac{\partial^{[\alpha]} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} && \text{si } \alpha \neq (0, \dots, 0) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où on utilise la notation :  $[\alpha] = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  (parfois on appelle ordre de dérivation le nombre naturel  $[\alpha]$ ).

Dans le cas  $n = 1$  le vecteur  $\alpha$  se réduit à un seul élément  $\in \mathbb{N}$  qu'on peut toujours noter par  $\alpha$  et la dérivée à l'ordre  $\alpha$  correspondante sera notée par  $f^{(\alpha)}$ .

19. On note  $C(\Omega, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions **continues** définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  on note  $C^m(\Omega, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , telles que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $[\alpha] \leq m$ , la dérivée  $D^\alpha \varphi$  existe et est continue sur  $\Omega$ . Remarquons que  $C^0(\Omega, \mathbb{K}) = C(\Omega, \mathbb{K})$ .

On note  $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  qui sont **indéfiniment dérivables** (c'est à dire, telles que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  la dérivée  $D^\alpha \varphi$  existe et est continue sur  $\Omega$ ).

Nous notons  $C(\Omega) = C(\Omega, \mathbb{R})$ ,  $C^m(\Omega) = C^m(\Omega, \mathbb{R})$  et  $C^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ .

20. Soit  $A$  un ensemble tel que  $\Omega \subset A \subset \bar{\Omega}$  (donc  $A$  contient  $\Omega$  ainsi que éventuellement une partie de sa frontière). Pour tout  $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  nous notons par  $C^m(A, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions  $u \in C^m(\Omega, \mathbb{K})$  tels que pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec  $[\alpha] \leq m$  la dérivée  $D^\alpha u$  se prolonge par continuité sur  $A$ .

Il est clair qu'on a  $C^m(A, \mathbb{K}) \subset C^m(\Omega, \mathbb{K})$ , avec inclusion stricte si l'inclusion de  $\Omega$  en  $A$  est stricte.

Nous notons encore  $C^m(A, \mathbb{R})$  par  $C^m(A)$ .

**Remarque 1.1.** (a) On utilise souvent la notation précédente avec  $A = \overline{\Omega}$ , donc on utilisera souvent l'ensemble  $C^m(\overline{\Omega}, \mathbb{K})$ .

(b) Une fonction peut être dans  $C^m(A, \mathbb{K})$  même si elle est définie seulement sur  $\Omega$ . Par ailleurs on peut dire aussi pour certaines fonctions définies sur  $A$  qu'elle sont dans  $C^m(A, \mathbb{K})$ , mais on sous-entend que ce sont les restrictions de ces fonctions sur  $\Omega$  qui sont dans  $C^m(A, \mathbb{K})$ .

**Cas particulier** (souvent rencontré dans la pratique) : Soit  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  avec  $\Sigma$  ouvert tel que  $A \subset \Sigma$  et  $u \in C^m(\Sigma, \mathbb{K})$ . Alors  $u|_{\Omega} \in C^m(A, \mathbb{K})$  (car on peut voir la restriction de  $u$  sur  $A$  comme un prolongement de  $u|_{\Omega}$  sur  $A$ ). Remarquons qu'on peut aussi dire  $u|_A \in C^m(A, \mathbb{K})$ .

21. Soit encore  $A$  un ensemble tel que  $\Omega \subset A \subset \overline{\Omega}$ .

Pour tout  $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$  nous notons par  $C^m(A, \mathbb{K}^p)$  l'ensemble des

fonctions  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}^p$  tels que si on pose  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_p \end{pmatrix}$  avec  $u_i : A \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$

alors  $u_i \in C^m(A, \mathbb{K})$  pour tous  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

Rappelons le résultat suivant qui sera très souvent utilisé dans ce cours :

**Proposition 1.1.** (Théorème de Weierstrass) Si  $S \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble compact et  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes. Ceci veut dire :

1. Il existe  $M \geq 0$  tel que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in S$$

2. Il existe  $a, b \in S$  tels que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad \forall x \in S.$$

Nous finissons cette section par la définition suivante :

**Définition 1.1.** Soit  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , notons  $a = \inf(I) \in [-\infty, +\infty[$  et  $b = \sup(I) \in ]-\infty, +\infty]$  et supposons que  $a < b$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction et  $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . On dit que :

a)  $f$  est de classe  $C^m$  par morceaux au sens large sur  $I$  si :

- soit  $f|_{]a,b[}$  est dans  $C^m(]a,b[, \mathbb{K})$

- soit il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_k$  avec  $a < a_1 < a_2 < \dots < a_k < b$  tels que si on pose  $a_0 = a, a_{k+1} = b$  et  $I_j = ]a_{j-1}, a_j[, j = 1, \dots, k+1$  alors  $f|_{I_j} \in C^m(I_j, \mathbb{K}), j = 1, \dots, k+1$ .

b)  $f$  est de classe  $C^m$  par morceaux au sens restreint sur  $I$  si :

- soit  $f|_{]a,b[} \in C^m(I, \mathbb{K})$

- soit il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  et des points  $a_1, a_2, \dots, a_k$  avec  $a < a_1 < a_2 < \dots < a_k < b$  tels que si on pose  $a_0 = a, a_{k+1} = b$  et  $I_j = ]a_{j-1}, a_j[, j = 1, \dots, k+1$  alors  $f|_{I_j} \in C^m(S_j, \mathbb{K}), j = 1, \dots, k+1$ , où on pose  $S_j = \overline{I_j} \cap I, \forall j = 1, 2, \dots, k+1$ , c'est à dire

$S_1 = [a, a_1]$  si  $a \in I, \quad S_1 = ]a, a_1]$  si  $a \notin I$

$S_{k+1} = [a_k, b]$  si  $b \in I, \quad S_{k+1} = [a_k, b[$  si  $b \notin I$  et

$$S_j = [a_{j-1}, a_j] \quad \text{si } j = 2, \dots, k \text{ et } k \geq 2.$$

**Remarques :**

1. pour  $m = 0$  on peut dire aussi "continue par morceaux .." au lieu de "de classe  $C^0$  par morceaux ..".
2. Il est évident que si une fonction est de classe  $C^m$  par morceaux au sens restreint alors elle est de classe  $C^m$  par morceaux au sens large.
3. Dans la suite on va dire par commodité "de classe  $C^m$  par morceaux" à la place de "de classe  $C^m$  par morceaux au sens restreint".
4. Pour une fonction  $f$  de classe  $C^m$  par morceaux,  $f$  ainsi que toute ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$  ont des limites finies à gauche et à droite dans tous les points (éventuels)  $a_1, a_2, \dots, a_k$ ; si  $a \in I$  alors  $f$  ainsi que toute ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$  ont des limites à droite en  $a$ ; de même si  $b \in I$  alors  $f$  ainsi que toute ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$  ont des limites à gauche en  $b$ .  
Tout ceci n'est pas vrai en général pour une fonction qui est seulement de classe  $C^m$  par morceaux au sens large.

*Exemples :*

### 1.3 La notion de mesure ; cas particulier de la mesure de Lebesgue

Dans la suite nous introduisons la mesure de Lebesgue qui est un nombre réel positif ( $\geq 0$ ) qu'on associe à "tout" ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .

On commence d'abord par introduire la notion générale de **mesure** ; la mesure de Lebesgue sera vue comme le cas particulier le plus important de ce cours.

Dans la suite pour tout ensemble  $X$  on notera  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble des parties de  $X$  (y compris l'ensemble vide  $\emptyset$ ).

*Exemple :*

On définit maintenant la notion de mesure. L'idée est d'associer à chaque sous-ensemble d'un ensemble  $X$  un nombre positif (qui peut être  $+\infty$ ) avec certaines propriétés.

**Définition 1.2.** Soit  $X$  un ensemble non vide et soit  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty] \equiv \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

On dit que  $\mu$  est une **mesure** sur  $X$  si

a)  $\mu(\emptyset) = 0$

b) Pour toute suite des ensembles  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  avec  $A_n \subset X$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et avec  $A_n$  disjointes deux à deux ( $A_n \cap A_m = \emptyset$ ,  $\forall n \neq m$ ) on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu(A_n)$$

(cette propriété s'appelle **propriété d'additivité infinie** ou de  $\sigma$  - **additivité**).

On dira alors que le couple  $(X, \mu)$  est un **espace mesuré**.

Un **exemple** dans la vie réelle :  $X$  est l'espace  $\mathbb{R}^3$  et la mesure sur  $X$  est le volume ou la masse de matière qui se trouve dans une région  $A \subset \mathbb{R}^3$  de l'espace.

**Remarque 1.2.** 1. La définition précédente n'est qu'une version simplifiée de la vraie notion de mesure. En général on envisage que certaines sous-ensembles de  $X$  ne puissent pas se mesurer. On met alors les ensembles qu'on peut mesurer dans une collection de sous-ensembles de  $X$  appelée **tribu** sur  $X$  (qui est donc un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(X)$ ) ayant certaines propriétés. La "vraie" mesure se définit alors comme une application sur cette tribu. On pourrait appeler la mesure définie dans ce cours "mesure totale" car elle est définie sur tout  $\mathcal{P}(X)$ , sans restriction. On utilisera cependant le nom "mesure" pour simplifier le vocabulaire de ce cours.

2. Si la mesure  $\mu$  satisfait en plus la condition  $\mu(X) = 1$  alors on dit que  $\mu$  est une **probabilité** sur  $X$ .

**Proposition 1.2.** Si  $X$  est un ensemble et  $\mu$  est une mesure sur  $X$  alors on a

1. Si  $A_1, A_2, \dots, A_m$  sont des sous-ensembles disjointes de  $X$  (donc  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$ ) alors

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i)$$

(cette propriété s'appelle **propriété d'additivité finie**).

**En particulier**, si  $A_1, A_2 \subset X$  avec  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  on a

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

2. Si on a  $A, B \subset X$  avec  $A \subset B$  alors

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

*Démonstration.* 1). On introduit la suite des ensembles  $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  où  $B_k = A_k$  si  $k \leq m$  et  $B_k = \emptyset$  si  $k \geq m + 1$ ; On a

$$\cup_{i=1}^m A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

On montre ensuite qu'on peut utiliser pour la suite  $\{B_k\}$  la partie **b)** de la Définition 1.2, ce qui donne

$$\mu(\cup_{i=1}^m A_i) = \mu(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^m \mu(B_i)$$

car  $\mu(\emptyset) = 0$  de la partie **a)** de la Définition 1.2.

2).  $B = A \cup (B \setminus A)$  avec  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$  donc  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ . Finalement l'inégalité  $\mu(B \setminus A) \geq 0$ , nous donne le résultat.  $\square$

### Exemples de mesure

**Exemple 1.** Soit  $X$  un ensemble et  $a \in X$ . On introduit l'application suivante :

$$\delta_a : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty],$$

définie pour tout  $B \subset X$  par

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in B \\ 0 & \text{si } a \notin B \end{cases}$$

On peut montrer que  $\delta_a$  est bien une mesure sur  $X$  (exercice en TD). Cette mesure s'appelle **mesure de Dirac** en  $a$ ; il est très facile de voir que  $\delta_a$  est en fait une probabilité.

Un exemple de situation pratique où on peut utiliser la mesure de Dirac est la suivante : supposons qu'on veut introduire une mesure  $\mu$  sur  $X \subset \mathbb{R}^3$  qui donne pour tout  $B \subset X$  la masse de la matière qui se trouve dans  $B$ . Supposons qu'on est dans une situation où toute la matière de  $X$  est concentrée dans un point  $a \in X$  (par exemple dans un atome qui occupe un espace  $X$ , si on néglige la masse des électrons alors toute la masse de l'atome est concentrée dans son noyau ; mais comme la taille du noyau est très petite par rapport à la taille de l'atome, on peut dire que l'espace occupé par le noyau est réduit à un point). Alors une bonne approximation pour la mesure  $\mu$  dans ce cas est la mesure de Dirac sur  $X$  qui est  $\delta_a$ .

**Exemple 2.** Dans la suite on va introduire une mesure particulière définie sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ ; c'est la mesure de Lebesgue.

**Proposition 1.3.** (Résultat admis) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors il existe une mesure  $\lambda_n$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que pour tout ensemble  $P$  du type “pavé ouvert” de la forme

$$P = ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[ \times \cdots \times ]a_n, b_n[ \subset \mathbb{R}^n$$

avec  $-\infty < a_i < b_i < +\infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ , on a

$$\lambda_n(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Cette mesure  $\lambda_n$  s'appelle **mesure de Lebesgue** sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 1.3.** 1. En fait la mesure de Lebesgue est définie seulement sur un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  appelé tribu de Lebesgue. Mais on va “ignorer” pour la suite de ce cours qu'il existe des ensembles  $A \subset \mathbb{R}^n$  pour lesquels  $\lambda_n(A)$  n'est pas défini (on ne rencontrera jamais dans la pratique de tels ensembles!).

2. La mesure de Lebesgue n'est pas la seule mesure qu'on peut définir sur  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple, la mesure de Dirac sur  $\mathbb{R}^n$  en 0 est une autre mesure sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 1.4.** La Proposition 1.3 nous donne :

Si  $n = 1$  et  $P = ]a, b[$ , alors  $\lambda_1(P) = b - a$ . Dans ce cas la mesure de  $P$  est la **longueur** du segment  $]a, b[$ .

Si  $n = 2$  et  $P = ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[$ , alors  $\lambda_2(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ ; la mesure de  $P$  est alors **l'aire** du rectangle  $]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[$ .

Si  $n = 3$  et  $P = ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[ \times ]a_3, b_3[$ , alors  $\lambda_3(P) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$  et la mesure de  $P$  n'est autre que le **volume** du parallélépipède  $]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[ \times ]a_3, b_3[$ .

Alors la mesure de Lebesgue généralise respectivement la longueur, l'aire et le volume des sous-ensembles de  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ .

**Exemples :**

On a les résultats suivants :

**Proposition 1.4.** Si  $B \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble **borné** alors  $\lambda_n(B) < +\infty$ .

*Démonstration.* Comme  $B$  est borné alors il existe  $M > 0$  tel que

$$B \subset ]-M, M[^n.$$

Alors

$$\lambda_n(B) \leq \lambda_n(]-M, M[^n) = (2M)^n < +\infty$$

ce qui montre le résultat. □

**Proposition 1.5.** Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  on a

$$\lambda_1(]a, +\infty[) = \lambda_1([a, +\infty[) = \lambda_1(]-\infty, a]) = \lambda_1(]-\infty, a]) = +\infty$$

*Démonstration.* Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  avec  $m > a$  on a  $]a, +\infty[ \supset ]a, m[$  ce qui donne

$$\lambda_1(]a, +\infty[) \geq \lambda_1(]a, m[) = m - a$$

En passant à la limite  $m \rightarrow +\infty$  on obtient

$$\lambda_1(]a, +\infty[) = +\infty.$$

Les autres résultats s'obtiennent de manière analogue.  $\square$

On verra plus loin que la réciproque de ce résultat est fautive : un ensemble  $B$  peut ne pas être borné et avoir une mesure de Lebesgue finie.

**Remarque 1.5.** *Pour calculer la mesure de Lebesgue d'un ensemble quelconque en  $\mathbb{R}^n$  on pourrait décomposer cet ensemble en une union (éventuellement infinie) des pavés et faire la somme des mesures de chaque pavé. Pour un ensemble arbitraire ceci peut être assez compliqué (par exemple pour un disque dans le plan). On verra plus loin une méthode plus simple pour calculer la mesure de Lebesgue d'un ensemble.*

**Définition 1.3.** *Soit  $(X, \mu)$  un espace mesuré. On dit qu'un ensemble  $A \subset X$  est **négligeable par rapport à  $\mu$**  (on peut dire aussi " $\mu$  - négligeable" ou simplement "négligeable" s'il n'y a pas de confusion possible) si sa mesure est nulle (c'est à dire  $\mu(A) = 0$ ).*

Le résultat suivant dit que la mesure de Lebesgue de tout singleton est égale à zéro (donc tout singleton est négligeable par rapport à la mesure de Lebesgue) :

**Proposition 1.6.** *Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on a*

$$\lambda_n(\{x\}) = 0.$$

*Démonstration.* Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  on introduit le pavé

$$P_k = \left]x_1 - \frac{1}{k}, x_1 + \frac{1}{k}\right[ \times \left]x_2 - \frac{1}{k}, x_2 + \frac{1}{k}\right[ \times \cdots \times \left]x_n - \frac{1}{k}, x_n + \frac{1}{k}\right[.$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Il est évident que

$$\{x\} \subset P_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

ce qui donne

$$0 \leq \lambda_n(\{x\}) \leq \left(\frac{2}{k}\right)^n \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

En passant à la limite  $k \rightarrow \infty$  on obtient le résultat.  $\square$

**Remarque 1.6.** *En général un singleton n'est pas négligeable par rapport à toute mesure (même sur  $\mathbb{R}^n$ ). Par exemple si  $X = \mathbb{R}$  et  $\mu = \delta_0$  alors le singleton  $\{0\}$  n'est pas négligeable par rapport à la mesure  $\delta_0$ , car  $\delta_0(\{0\}) = 1$ . En revanche toute ensemble qui ne contient pas 0 est  $\delta_0$  - négligeable (par exemple  $]1, 3[$  est  $\delta_0$  - négligeable, mais il n'est pas  $\lambda_1$  - négligeable, car  $\lambda_1(]1, 3[) = 3 - 1 = 2$ ).*

On déduit de la Proposition 1.6 que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  on a

$$\lambda_1(]a, b]) = \lambda_1([a, b]) = \lambda_1([a, b]) = \lambda_1(]a, b[) = b - a$$

(car par exemple  $]a, b] = ]a, b[ \cup \{b\}$  donc  $\lambda_1(]a, b]) = \lambda_1(]a, b[) + \lambda_1(\{b\}) = b - a + 0 = b - a$ ).

On a aussi :

**Proposition 1.7.** *Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble au plus dénombrable (c'est à dire fini ou dénombrable) alors  $\lambda_n(A) = 0$ .*

*Démonstration.* On a

$$A = \cup_{x \in A} \{x\}$$

et on peut écrire

$$\lambda_n(A) = \sum_{x \in A} \lambda_n(\{x\}) = \sum_{x \in A} 0 = 0.$$

□

**Exemples :**

1. L'ensemble  $\{1, 2\}$  est un ensemble de mesure de Lebesgue 0 en  $\mathbb{R}$ .

2. L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationels est un ensemble de mesure de Lebesgue 0 en  $\mathbb{R}$ . De même  $\mathbb{Q}^n$  est de mesure de Lebesgue 0 en  $\mathbb{R}^n$ .

Ces deux ensembles sont des exemples d'ensembles non bornés et de mesure finie.

On va voir maintenant un exemple d'ensemble de mesure nulle qui n'est pas au plus dénombrables.

**Exemple :** *Soit  $D$  une droite en  $\mathbb{R}^2$  parallèle à l'une des axes (par exemple supposons que  $D$  est parallèle à l'axe horizontale,  $D = \mathbb{R} \times \{a\} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ). Alors la mesure de Lebesgue de  $D$  en  $\mathbb{R}^2$  est nulle (c'est à dire  $\lambda_2(D) = 0$ ).*

*Idee preuve :* Remarquons que  $D$  peut s'écrire sous la forme  $D = \cup_{j \in \mathbb{Z}} D_j$  avec  $D_j = ]j, j + 1[ \times \{a\}$ , les ensembles  $D_j$  étant disjointes deux à deux.

Montrons maintenant que pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  on a

$$\lambda_2(D_j) = 0. \tag{1.2}$$

En effet on a  $D_j \subset P_{j,n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  où  $P_{j,n} = ]j - 1, j + 1[ \times ]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$ . Comme  $\lambda_2(P_{j,n}) = 2 \frac{2}{n} = \frac{4}{n} \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow +\infty$  et  $\lambda_2(D_j) \leq \lambda_2(P_{j,n})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous obtenons (1.2).

On a alors

$$\lambda_2(D) = \lambda_2(\cup_{j \in \mathbb{Z}} D_j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \lambda_2(D_j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 0 = 0$$

ce qui donne le résultat.



Ce résultat peut se généraliser au cas d'une courbe arbitraire en  $\mathbb{R}^2$ , ayant une certaine régularité (par exemple de classe  $C^1$ ); ça peut encore se généraliser au cas des variétés de classe  $C^1$ .

Nous donnons dans la suite une version simplifiée de la notion de variété.

**Définition 1.4.** Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$  avec  $m < n$  et soit  $A \subset \mathbb{R}^n$ . On dit que  $A$  est une **variété** de classe  $C^1$  et de dimension  $m$  s'il existe :

$U \subset \mathbb{R}^m$  un ensemble ouvert

un autre ensemble  $V$  avec  $U \subset V \subset \bar{U}$

et  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction injective avec  $\varphi \in C^1(V)$

tels que  $A = \varphi(V)$ .

*Exemple : en classe*

**Remarque 1.7.** Par convention un point  $x \in \mathbb{R}^n$  sera considéré comme une variété de classe  $C^1$  et de dimension 0 en  $\mathbb{R}^n$ .

On a le résultat suivant, admis sans preuve :

**Proposition 1.8.** Toute variété de classe  $C^1$  et de dimension  $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est de mesure de Lebesgue 0 en  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque importante :** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert; très souvent la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est soit une variété de classe  $C^1$  et de dimension  $n-1$  soit une union finie de plusieurs variétés de classe  $C^1$  et de dimension égale à  $n-1$ .

Alors de la Proposition 1.8 on déduit  $\lambda_n(\partial\Omega) = 0$ . Ceci implique immédiatement que  $\lambda_n(\bar{\Omega}) = \lambda_n(\Omega)$ , où  $\bar{\Omega}$  est l'adhérence de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^n$

(car  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  avec  $\Omega$  et  $\partial\Omega$  disjointes, donc  $\lambda_n(\bar{\Omega}) = \lambda_n(\Omega) + \lambda_n(\partial\Omega) = \lambda_n(\Omega)$ .)

*Exemple : en classe*

**Définition 1.5.** Soit  $(X, \mu)$  un espace mesuré et  $A \subset X$ . On dira qu'une propriété sur  $A$  a lieu  $\mu$  - presque partout sur  $A$  (on dit aussi  $\mu$  - pour presque tous  $x \in A$  et on peut noter :  $\mu$  - p.p.  $x \in A$ ) si l'ensemble des  $x \in A$  pour lesquels la propriété n'a pas lieu est un ensemble  $\mu$  - négligeable.

Convention : Si  $X = \mathbb{R}^n, A \subset \mathbb{R}^n$  et si la mesure  $\mu$  n'est pas précisée alors par convention il s'agit de la mesure de Lebesgue  $\lambda_n$ .

**Exemple :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 2 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \text{ et } x \neq 3 \end{cases}$$

Alors  $f(x) = 0$ , p.p.  $x \in \mathbb{R}$ ; on dit aussi  $f = 0$  presque partout sur  $\mathbb{R}$  (car l'ensemble des  $x$  tels que  $f(x) \neq 0$  est  $\{1, 3\}$  qui est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle).

## 1.4 L'intégrale par rapport à une mesure et le cas particulier de l'intégrale de Lebesgue

Pour une fonction  $f : A \mapsto \mathbb{R}$  avec  $A \subset \mathbb{R}^n$  nous allons définir un autre type d'intégrale de  $f$  sur  $A$ , que l'intégrale de Rieman.

Pour plus de généralité on définira l'intégrale par rapport à une mesure quelconque.

Dans toute cette section  $(X, \mu)$  désigne un espace mesuré quelconque.

**Notations et conventions :**

1. Nous notons  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  et nous utilisons la convention

$$(+\infty) \cdot 0 = 0.$$

(en fait il s'agit d'une extension de la définition de la multiplication sur  $\mathbb{R}$  au cas où on multiplie  $+\infty$  avec 0; cela n'est pas en contradiction avec le fait que si on a deux suites réelles  $u_n \rightarrow +\infty$  et  $v_n \rightarrow 0$  alors la limite de  $u_n v_n$  est indéterminée)

2. - Pour tout  $y \in \overline{\mathbb{R}}$  nous notons  $y^+ = \max\{y, 0\}$  (partie positive de  $y$ ) et  $y^- = -\min\{y, 0\}$  (partie négative de  $y$ ).

Nous avons :  $y^+ \geq 0, y^- \geq 0, y = y^+ - y^-$  et  $|y| = y^+ + y^-$  (Exercice facile!).

- Pour tout ensemble  $X$  et toute fonction  $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$  nous introduisons les fonctions  $f^+, f^- : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$  définies par  $f^\pm(x) = (f(x))^\pm, \forall x \in X$ .

3. Pour tout sous-ensemble  $A$  de  $X$  la **fonction indicatrice** de  $A$  sur  $X$  désigne la fonction notée  $1_A$  avec  $1_A : X \mapsto \mathbb{R}$  définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus A. \end{cases} \quad (1.3)$$

**Définition 1.6.** Soit  $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$  une fonction. On dit que  $f$  est **étagée** si elle prend un nombre fini de valeurs, c'est à dire, s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \overline{\mathbb{R}}$  tels que  $f(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ .

On notera alors  $A_i = f^{-1}(\alpha_i) \subset X$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  et on remarque que les ensembles  $A_1, \dots, A_k$  sont nonvides, disjointes deux à deux, avec en plus

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$$

(on dira que ces ensembles forment une **partition** de  $X$ ). On peut alors écrire  $f$  sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}. \quad (1.4)$$

Dans la suite on va considérer une fonction  $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$  et on définira (quand elle existe) l'intégrale de  $f$  sur  $X$  par rapport à la mesure  $\mu$  (on peut dire aussi : pour la mesure  $\mu$ ), notée  $\int_X f d\mu$ .

**Remarque :** Il y a aussi une notion de "fonction mesurable" par rapport à une mesure, notion qui ne sera pas abordée dans ce cours. En fait pour intégrer une fonction il faut d'abord qu'elle soit mesurable ; mais on ne rencontre pas dans la pratique des fonctions qui ne sont pas mesurables au sens de Lebesgue.

La construction de cette intégrale se fait en plusieurs étapes.

**Etape 1)** On suppose que  $f(X) \subset [0, +\infty]$  et que  $f$  est une fonction étagée, donc  $f$  se met sous la forme (1.4). Alors par définition on pose

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(f^{-1}(\alpha_i)).$$

qui est un nombre appartenant à l'intervalle  $[0, +\infty]$ .

*Exemples : en classe*

1. avec  $\mu = \lambda_1$

2. avec  $\mu = \delta_a$

**Etape 2)** On suppose que  $f$  est une fonction arbitraire telle que  $f(X) \subset [0, +\infty]$ . Dans ce cas pour définir l'intégrale de  $f$  l'idée est d'approcher  $f$  par une suite croissante des

fonctions étagées. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  on introduit la fonction  $f_p : X \mapsto [0, +\infty[$  définie par

$$f_p(y) = \frac{k}{2^p} \quad \text{si} \quad f(y) \in \left[ \frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p} \right] \quad \text{ceci pour tout } k \in \{0, 1, \dots, p2^p - 1\}$$

et

$$f_p(y) = p \quad \text{si} \quad f(y) \geq p.$$

- Il est évident que  $f_p$  est une fonction étagée et que  $f_p(X) \subset [0, +\infty[$ .

- On peut montrer (*résultat admis!*) que  $f_p$  est une suite **croissante** des fonctions, c'est à dire :  $f_p(y) \leq f_{p+1}(y) \quad \forall y \in X, \forall p \in \mathbb{N}^*$ .

- On peut aussi montrer (*résultat admis!*) la **convergence simple** de la suite  $f_p$  vers  $f$ , c'est à dire pour tout  $y \in X$  on a  $f_p(y) \rightarrow f(y)$  pour  $p \rightarrow +\infty$ .

Il est clair qu'on peut définir  $\int_X f_p d\mu \in [0, +\infty]$  (que nous notons  $I_p$ ) en appliquant la définition de l'Étape 1, ce qui donne

$$I_p = \int_X f_p d\mu = \sum_{k=0}^{p2^p-1} \frac{k}{2^p} \mu \left( f^{-1} \left[ \frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p} \right] \right) + p\mu (f^{-1}([p, +\infty]))$$

On peut aussi montrer (*résultat admis!*) que la suite réelle et positive  $I_p$  est une suite croissante. Il admet alors une limite dans l'intervalle  $[0, +\infty]$  et on définit  $\int_X f d\mu$  comme étant cette limite. Donc

$$\int_X f d\mu = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_X f_p d\mu \in [0, +\infty].$$

On admet que dans le cas particulier où  $f$  est une fonction étagée et positive on retrouve pour  $\int_X f d\mu$  l'expression donnée à l'Étape 1.

**Étape 3)** On suppose ici que  $f$  est une fonction arbitraire. On considère alors les fonctions  $f^+, f^- : X \mapsto [0, +\infty]$  avec  $f = f^+ - f^-$  et  $|f| = f^+ + f^-$ . En utilisant l'Étape 2 on peut définir  $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu \in [0, +\infty]$ .

Nous avons alors 4 cas :

**Cas 1 :**) Si  $\int_X f^+ d\mu < +\infty$  et  $\int_X f^- d\mu < +\infty$

(on admet que ceci est équivalent avec :  $\int_X |f| d\mu < +\infty$ ).

Par définition on dira alors que  $f$  est intégrable sur  $X$  par rapport à la mesure  $\mu$  et on définit l'intégrale de  $f$  sur  $X$  par rapport à  $\mu$  comme étant le nombre réel donné par

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in \mathbb{R}.$$

**Cas 2 :**) Si  $\int_X f^+ d\mu = +\infty$  et  $\int_X f^- d\mu < +\infty$  alors par définition on pose

$$\int_X f d\mu = +\infty.$$

On dira alors que  $f$  n'est pas intégrable sur  $X$  par rapport à la mesure  $\mu$  mais que l'intégrale de  $f$  sur  $X$  par rapport à la mesure  $\mu$  existe et est égale à  $+\infty$

(c'est analogue à la convergence des suite réelles : quand une suite tend vers  $+\infty$  on dit que la limite existe, est égale à  $+\infty$ , mais que la suite n'est pas convergente).

**Cas 3 :**) Si  $\int_X f^+ d\mu < +\infty$  et  $\int_X f^- d\mu = +\infty$  alors par définition on pose

$$\int_X f d\mu = -\infty.$$

De la même manière qu'au Cas 2, on dira que  $f$  n'est pas intégrable sur  $X$  par rapport à la mesure  $\mu$  mais que l'intégrale de  $f$  sur  $X$  par rapport à la mesure  $\mu$  existe et est égale à  $-\infty$ .

**Cas 4 :**) Si  $\int_X f^+ d\mu = +\infty$  et  $\int_X f^- d\mu = +\infty$  alors on dira encore que  $f$  n'est pas intégrable sur  $X$  par rapport à la mesure  $\mu$ , mais aussi que l'intégrale de  $f$  sur  $X$  par rapport à la mesure  $\mu$  n'existe pas, ou qu'elle n'a pas du sens (contrairement aux Cas 2 ou Cas 3 où cette intégrale existe).

Donc pour résumer :

- on a un seul cas où  $f$  est intégrable sur  $X$  par rapport à la mesure  $\mu$  : c'est le Cas 1.
- dans les Cas 2 ou 3 l'intégrale de  $f$  existe mais  $f$  n'est pas intégrable.
- dans le Cas 4 l'intégrale de  $f$  n'a pas du sens.

On peut dire aussi :  $f$  est intégrable sur  $X$  par rapport à  $\mu$  si et seulement si

$$\int_X |f| d\mu < +\infty.$$

Dans le cas particulier  $f \geq 0$  on a que  $f$  est intégrable sur  $X$  si et seulement si

$$\int_X f d\mu < +\infty \text{ (car dans ce cas } f^+ = f \text{ et } f^- = 0 \text{ donc } \int_X f^- = 0).$$

Exemple : en classe

**Remarque 1.8.** Si  $(X, \mu)$  est tel que  $\mu$  est une probabilité et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction, alors on dit que  $f$  est une **variable aléatoire réelle** sur  $X$ . Alors  $\int_X f d\mu$  (si elle existe) n'est autre que **l'espérance** de  $f$ .

### Extensions de la définition de l'intégrale :

1. Si  $A$  est un sous-ensemble de  $X$  et  $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  alors on définit une extension  $\tilde{f} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  de  $f$  sur  $X$  par l'égalité

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in A \\ 0 & \text{si } y \in X - A. \end{cases}$$

Alors par définition l'intégrale  $\int_A f d\mu$  existe et est un élément de  $\overline{\mathbb{R}}$  si et seulement si  $\int_X \tilde{f} d\mu$  existe (voir **Etape 3** ci-dessus) et on a

$$\int_A f d\mu = \int_X \tilde{f} d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

On dit aussi que  $f$  est intégrable sur  $A$  si et seulement si  $\tilde{f}$  est intégrable sur  $X$ .  
On peut écrire :

$$f \text{ est intégrable sur } A \iff \int_A |f| d\mu < +\infty$$

(car  $f$  intégrable sur  $A \iff \tilde{f}$  intégrable sur  $X \iff \int_X |\tilde{f}| d\mu < +\infty$   
 $\iff \int_A |f| d\mu < +\infty$ .)

Il est évident que dans le cas  $f \geq 0$  alors  $f$  est intégrable sur  $A$  si et seulement si  $\int_A f d\mu < +\infty$  (car dans ce cas  $\tilde{f}^+ = \tilde{f}$  et  $\tilde{f}^- = 0$  donc  $\int_X \tilde{f}^- d\mu = 0$ ).

2. Si  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  alors nécessairement on a  $f = f_1 + if_2$ , où  $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors par **définition** on dit que  $f$  est intégrable sur  $A$  si  $f_1$  et  $f_2$  sont intégrables sur  $A$  (voir 1. ci-dessus). On définit alors l'intégrale de  $f$  sur  $A$  comme étant le nombre complexe donné par

$$\int_A f d\mu = \int_A f_1 d\mu + i \int_A f_2 d\mu.$$

On a encore

$$f \text{ est intégrable sur } A \iff \int_A |f| d\mu < +\infty$$

**Remarque :** On peut voir l'intégrale d'une fonction à valeur dans  $\mathbb{R}$  comme un cas particulier de l'intégrale d'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

**Remarque 1.9.** Dans ce cours on utilisera très souvent l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda_n$  pour une fonction définie sur un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dira simplement **intégrale de Lebesgue** ou **intégrable Lebesgue** ou lieu de *intégrale (ou intégrable) par rapport à la mesure de Lebesgue*.

Dans la suite nous donnons des propriétés fondamentales de ce type d'intégrales. On suppose dans la suite de ce chapitre que  $(X, \mu)$  est un espace mesuré et que  $A$  ou " $A$  avec des indices" (exemple :  $A_1, A_2, \dots$ ) désignent des sous-ensembles de  $X$ . Le term "intégrable" signifiera "intégrable par rapport à la mesure  $\mu$ ".

(L1) Pour toute constante  $c \in \mathbb{R}$  on a  $\int_A c d\mu = c\mu(A)$ .

**Conséquences :**

1. La fonction constante  $= 0$  est intégrable sur tout ensemble  $A$  et son intégrale sur  $A$  est égale à 0.
2. Toute fonction constante non nulle est intégrable sur  $A$  si et seulement si  $\mu(A) < +\infty$ .
3. On a la formule pratique suivante pour calculer la mesure d'un ensemble  $A$  :

$$\mu(A) = \int_A 1 \, d\mu.$$

**(L2)** (linéarité) : Si  $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{C}$  sont deux fonctions intégrables sur  $A$  et  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  alors  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$  est intégrable sur  $A$  et on a

$$\int_A [\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] \, d\mu = \alpha_1 \int_A f_1 \, d\mu + \alpha_2 \int_A f_2 \, d\mu.$$

Cette propriété se généralise de manière évidente au cas des plusieurs fonctions intégrables : si  $f_1, f_2, \dots, f_p : A \rightarrow \mathbb{C}$  sont des fonctions intégrables sur  $A$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{C}$  alors  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_p f_p$  est intégrable sur  $A$  et on a

$$\int_A \sum_{j=1}^p (\alpha_j f_j) \, d\mu = \sum_{j=1}^p \alpha_j \int_A f_j \, d\mu$$

**(L3)** (relation de Chasles) Supposons que  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  et soit  $f : A_1 \cup A_2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $f$  est intégrable sur  $A_1$  et sur  $A_2$  alors  $f$  est intégrable sur  $A_1 \cup A_2$  avec en plus

$$\int_{A_1 \cup A_2} f \, d\mu = \int_{A_1} f \, d\mu + \int_{A_2} f \, d\mu.$$

Cette propriété se généralise au cas de plusieurs ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_p$  qui sont disjointes deux à deux : si on pose  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p$  et si  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  est intégrable sur  $A_j$  pour tout  $j$  entre 1 et  $p$  alors  $f$  est intégrable sur  $A$  et on a

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{j=1}^p \int_{A_j} f \, d\mu.$$

**(L4)** Soient  $f, g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  telles que  $f(y) = g(y)$   $\mu$ -p. p.  $y \in A$ . Si  $f$  est intégrable sur  $A$  alors  $g$  est intégrable sur  $A$  avec en plus

$$\int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu.$$

Exemples :

1. avec  $\mu = \lambda_1$  :

Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

On considère la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f =$  la fonction constante 1.

Il est clair que  $f = g$   $\lambda_1$  - p.p. (car l'ensemble des  $x$  pour lesquels  $f(x) \neq g(x)$  est l'ensemble  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  qui est de mesure Lebesgue nulle). D'autre part  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $[0, 1]$  et  $\int_{[0,1]} f d\lambda_1 = 1\lambda_1([0, 1]) = 1$ . On déduit de **(L4)** que  $g$  est intégrable Lebesgue sur  $[0, 1]$  et  $\int_{[0,1]} g d\lambda_1 = 1$ .

2. avec  $\mu = \delta_a$

On considère  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction arbitraire et  $a \in \mathbb{R}$ . Nous considérons la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f =$  constante  $= g(a)$ . Nous avons  $f = g$   $\delta_a$  - p.p. (car l'ensemble de  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) \neq g(x)$  est inclus dans  $\mathbb{R} \setminus \{a\}$  qui est  $\delta_a$  négligeable, donc il est  $\delta_a$  négligeable). D'autre part, il est clair que  $f$  is intégrable sur  $\mathbb{R}$  par rapport à la mesure  $\delta_a$  et  $\int_{\mathbb{R}} f \delta_a = g(a)\delta_a(\mathbb{R}) = g(a)$ . On en déduit que  $g$  is intégrable sur  $\mathbb{R}$  par rapport à la mesure  $\delta_a$  et  $\int_{\mathbb{R}} g \delta_a = g(a)$ .

### Conséquences :

1. Si  $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est tel que  $f(y) = 0$   $\mu$  - p.p.  $y \in A$  alors  $f$  est intégrable sur  $A$  et

$$\int_A f d\mu = 0.$$

2. Si  $\mu(A) = 0$  et  $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  alors  $f$  est intégrable sur  $A$  avec en plus

$$\int_A f d\mu = 0.$$

(car  $f = 0$   $\mu$  - p.p.  $x \in A$ ).

**(L5)** (intégration des inégalités) Si  $f, g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sont tels que  $\int_A f d\mu$  et  $\int_A g d\mu$  existent avec en plus  $f(y) \leq g(y)$   $\mu$  - p.p.  $y \in A$  alors

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

**(L6)** Soient  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$  et  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  avec  $f$  intégrable sur  $A$  (c'est à dire :  $\int_A f d\mu < +\infty$ ). Si

$$|g(x)| \leq f(x) \quad \mu - \text{p.p. } x \in A$$

alors  $g$  est intégrable sur  $A$  (avec bien sur  $\int_A |g| d\mu \leq \int_A f d\mu$ ).

Preuve : Nous avons  $g^+ \leq |g| \leq f$ ; comme  $\int_A f d\mu < +\infty$  alors  $\int_A g^+ d\mu < +\infty$ . De la même manière on montre  $\int_A g^- d\mu < +\infty$ , ce qui donne le résultat.



Ce résultat est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction est intégrable : il suffit de majorer sa valeur absolue par une fonction dont on sait qu'elle est intégrable. On a alors :

**Conséquence 1.** Soit  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\mu = \lambda_n$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ . Si  $A$  est un ensemble borné et  $g$  est une fonction bornée alors  $g$  est intégrable Lebesgue sur  $A$ .

*Preuve :* Soit  $M \geq 0$  tel que  $|g(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in A$ . On applique le résultat général de **(L6)** avec  $f =$  la fonction constante  $M$ . Comme  $A$  est borné alors  $\lambda_n(A) < +\infty$  ce qui avec **(L1)** nous dit que  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $A$

(avec en plus  $\int_A f d\lambda_n = M\lambda_n(A) < +\infty$ ).

Ceci nous donne le résultat.

**Conséquence 2.** Si  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  est intégrable et  $B \subset A$  alors  $f|_B$  est intégrable sur  $B$ .

*Preuve :* considérer l'extension de  $f|_B$  sur  $A$  par 0, qu'on va encore noter  $\tilde{f}$ . On a clairement  $|\tilde{f}| \leq |f|$  ce qui nous donne le résultat grâce au **(L6)**.

**Conséquence 3.** Soient  $f : A \rightarrow [0, +\infty[$  avec  $f$  non intégrable sur  $A$  (donc  $\int_A f d\mu = +\infty$ ) et  $g : A \rightarrow \mathbb{K}$  avec

$$|g(x)| \geq f(x), \quad \mu - p.p. x \in A.$$

Alors  $g$  n'est pas intégrable sur  $A$ .

La preuve est très facile, elle se fait par absurde.

**(L7) (inégalité triangulaire)** Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ; alors  $f$  est intégrable sur  $A$  si et seulement si  $|f|$  est intégrable sur  $A$  et on a

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu.$$

*Preuve :* Si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  alors le résultat est une conséquence immédiate de l'Étape 3 de la construction de l'intégrale; on admet le résultat en général.

**(L8)** Si  $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est telle que  $f(x) \geq 0$   $\mu - p.p. x \in A$  et  $\int_A f d\mu = 0$  alors  $f(x) = 0$   $\mu - p.p. x \in A$ .

**Conséquence :** Si  $\mu(A) > 0$  et  $f(x) > 0$   $\mu - p.p. x \in A$  alors  $\int_A f d\mu > 0$  (preuve par absurde immédiate en utilisant **(L8)** ).

Le résultat suivant nous donne un cas où il y a coïncidence entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann.

**(L9) (uniquement pour les intégrales de Lebesgue)** Si  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue (ce qui implique par un résultat bien connu que  $f$  est intégrable Riemann sur  $\overline{\Omega}$ ) alors  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $\Omega$ , avec en plus

$$\int_{\Omega} f d\lambda_n = \int_{\overline{\Omega}} f(x) dx$$

où  $\int_{\overline{\Omega}} f(x) dx \in \mathbb{R}$  désigne l'intégrale de Riemann de  $f$  sur  $\overline{\Omega}$ .

*Exemple :* en classe

**Remarque 1.10.** On peut remplacer l'hypothèse : " $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f$  est une fonction continue" par : " $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f \in C(\overline{\Omega})$ ".

On a la conséquence importante suivante de (L9) :

**Proposition 1.9.** Soit  $I = [a, b]$  avec  $-\infty < a < b < +\infty$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue par morceaux (on sait alors que  $f$  est intégrable Riemann sur  $I$ ). Alors  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $I$  et on a l'égalité entre l'intégrale de Lebesgue de  $f$  sur  $I$  et l'intégrale de Riemann de  $f$  sur  $I$ .

*Démonstration.* On a deux cas :

1. Si  $f$  est continue sur  $I$  alors le résultat est une conséquence immédiate de (L9).
2. Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, a_2, \dots, a_k$  comme dans la Définition 1.1. Notons  $I_1 = ]a, a_1[$ ,  $I_{k+1} = ]a_k, b[$  et  $I_j = ]a_{j-1}, a_j[$  pour  $j = 2, 3, \dots, k$  (cette dernière partie est inexistante si  $k = 1$ ). Par hypothèse on a :  $f|_{I_j} \in C(\overline{I_j})$  pour  $j = 1, 2, \dots, k+1$ . On déduit alors de (L9) que  $f$  est intégrable Lebesgue sur chacun des intervalles  $I_j$  pour  $j = 1, 2, \dots, k+1$  et on a

$$\int_{I_j} f d\lambda_1 = \int_{\overline{I_j}} f(x) dx, \quad \forall j = 1, 2, \dots, k+1.$$

D'autre part,  $I$  se décompose en l'union suivante des ensembles disjointes deux à deux :

$$I = \cup_{j=1}^{k+1} I_j \cup B$$

avec  $B = \{a, a_1, \dots, a_k, b\}$  ensemble négligeable.

Comme  $f$  est intégrable Lebesgue sur chacune de ces ensembles alors  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $I$  et on a

$$\int_I f d\lambda_1 = \sum_{j=0}^k \int_{I_j} f d\lambda_1 + \int_B f d\lambda_1 = \sum_{j=0}^k \int_{\overline{I_j}} f(x) dx + 0 = \int_I f(x) dx$$

ce qui donne le résultat.

**Remarque 1.11.** (a) On déduit que dans la "plupart" des cas rencontrés dans les applications, l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann coïncident.

(b) Dans la suite on utilisera souvent pour l'intégrale de Lebesgue la même notation que pour l'intégrale de Riemann, c'est à dire, pour une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  on notera  $\int_A f(x) dx$  à la place de  $\int_A f d\lambda_n$ .

De plus, si  $A \subset \mathbb{R}$  est un intervalle (éventuellement non borné) d'extrémités  $\alpha < \beta$  alors on notera l'intégrale de Lebesgue de  $f$  sur  $A$  comme pour l'intégrale de Riemann :  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  au lieu de  $\int_A f(x) dx$  ou de  $\int_A f d\lambda_1$ .

□

*Exemple : en classe*

Dans la suite nous donnons (sans preuve) deux théorèmes qui permettent de passer à la limite dans l'intégrale par rapport à une mesure.

Autrement dit, ces théorèmes permettent de répondre à la question :

$$\text{A-t-on} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int f_n \right) = \int \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) \quad ?$$

**Théorème 1.1.** (*Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi*). Soit  $A \subset X$  et  $f_k : A \rightarrow [0, +\infty[$  une suite croissante et positive (à partir d'un certain rang) de fonctions, c'est à dire, il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$  on a

$$f_k(y) \leq f_{k+1}(y) \quad \forall y \in A$$

et

$$f_k(y) \geq 0 \quad \forall y \in A.$$

Soit  $f : A \rightarrow [0, +\infty]$  la fonction (qui peut prendre  $+\infty$  comme valeur) donnée par

$$f(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(y) \quad \forall y \in A.$$

On a alors

$$\int_A f d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu.$$

(les deux quantités dans l'égalité précédente peuvent être finies ou égales à  $+\infty$ ).

**Remarques :**

1. Il est évident que la suite réelle positive  $\int_A f_k d\mu$  est une suite croissante, donc la limite  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu$  existe et appartient à  $[0, +\infty]$ .
2. Ce théorème nous permet de déduire que
  - la fonction limite  $f$  est  $\mu$  - intégrable si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu < +\infty$
  - la fonction limite  $f$  n'est pas  $\mu$  - intégrable si  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu = +\infty$ .

Nous savons qu'une fonction bornée est intégrable Lebesgue sur tout ensemble borné. La proposition suivante nous permet de dire, pour une fonction définie sur un ensemble non-borné ou pour une fonction non-bornée, si elle est ou non intégrable Lebesgue.

Pour plus de généralité on va énoncer le résultat pour une intégrale par rapport à une mesure  $\mu$  quelconque, mais on l'appliquera pour l'intégrale de Lebesgue.

**Proposition 1.10.** Soit  $A \subset X$ ,  $m_0 \in \mathbb{N}$  et considérons  $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}, m \geq m_0}$  une suite des sous-ensembles de  $X$  tels que

1.  $A_m \subset A, \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_0$
2.  $A_m \subset A_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_0$  (propriété de monotonie)
3.  $\bigcup_{m=m_0}^{\infty} A_m = A$

Soit  $f : A \mapsto \mathbb{C}$  une fonction telle que  $f$  est intégrable sur  $A_m$  pour tout  $m \in \mathbb{N}, m \geq m_0$ .  
Nous avons alors :

**a)**  $f$  est intégrable sur  $A$  si et seulement si on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{A_m} |f| d\mu < +\infty$$

**b)** Si  $f$  est intégrable sur  $A$  alors

$$\int_A f d\mu = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{A_m} f d\mu.$$

*Démonstration.* **a)** Pour tout  $m \in \mathbb{N}, m \geq m_0$  on introduit la fonction  $f_m : A \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f_m = f 1_{A_m}$  (donc  $f_m(x) = f(x)$  si  $x \in A_m$  et  $f_m(x) = 0$  si  $x \in A \setminus A_m$ ); il est clair que  $|f_m| = |f| 1_{A_m}$ .

Il est facile de voir que  $|f_m|$  est une suite positive et croissante des fonctions et que

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) \quad \text{et} \quad |f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_m(x)|, \quad \forall x \in A.$$

Alors on peut appliquer le Théorème de Beppo-Levi (Théorème 1.1), pour la suite  $|f_m|$  des fonctions et la fonction limite  $|f|$ . On a alors

$$\int_A |f| d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A |f_m| d\mu.$$

Comme

$$\int_A |f_m| d\mu = \int_{A_m} |f_m| d\mu + \int_{A \setminus A_m} |f_m| d\mu = \int_{A_m} |f| d\mu + 0$$

on déduit

$$\int_A |f| d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A_m} |f| d\mu$$

ce qui donne le résultat.

**b)** Nous faisons la preuve pour  $f$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (pour le cas général la preuve sera alors immédiate).

On montre exactement comme on l'a fait pour  $|f|$  qu'on a

$$\int_A f^+ d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A_m} f^+ d\mu.$$

et aussi

$$\int_A f^- d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{A_m} f^- d\mu.$$

En faisant la différence entre ces deux égalités, on obtient le résultat attendu.  $\square$

**Remarque 1.12.** Ce résultat permet de faire le lien entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale généralisée apprise au niveau Licence 1 ou 2.

Par exemple si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction intégrable sur tout sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}$  alors l'intégrale généralisée  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  est définie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (\text{si cette limite existe})$$

On peut écrire cela autrement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{a_m}^{b_m} f(x) dx$$

où  $a_m, b_m$  sont des suites réelles arbitraires tels que  $a_m \rightarrow -\infty$  et  $b_m \rightarrow +\infty$ . La Proposition 1.10 permet de dire que l'intégrale de Lebesgue de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est donnée par une expression analogue :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{a_m}^{b_m} f(x) dx \quad (\text{si cette limite existe})$$

(pour cela il suffit d'appliquer la Proposition 1.10 avec  $A_m = [a_m, b_m]$  ; il faut faire en plus les hypothèses :  $a_m$  décroissante et  $b_m$  croissante).

### Exemple fondamental :

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avec  $\alpha \neq 0$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x) = e^{\alpha x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous avons le résultat suivant :

1. Si  $\alpha < 0$  alors :

i)  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $I$  avec  $I = [\beta, +\infty[$  ou  $I = ]\beta, +\infty[$ . En plus on a

$$\int_I f(x) dx = -\frac{1}{\alpha} e^{\alpha \beta}.$$

ii)  $f$  est non intégrable Lebesgue sur  $J$  avec  $J = ]-\infty, \beta]$  ou  $J = ]-\infty, \beta[$ .

2. Si  $\alpha > 0$  alors :

i)  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $I$  avec  $I = ]-\infty, \beta]$  ou  $I = ]-\infty, \beta[$ . En plus on a

$$\int_I f(x) dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha \beta}.$$

ii)  $f$  est non intégrable Lebesgue sur  $J$  avec  $J = [\beta, +\infty[$  ou  $J = ]\beta, +\infty[$ .

*Démonstration.* On va utiliser la Proposition 1.10 avec  $X = \mathbb{R}$  et  $\mu = \lambda_1$ .

1. Le cas  $\alpha < 0$  ;

i) On pose  $I_m = ]\beta, m]$  si  $\beta \in I$  ou  $I_m = ]\beta, m]$  si  $\beta \notin I$  avec  $m \in \mathbb{N}$  assez grand (on peut prendre par exemple  $m \geq m_0$  avec  $m_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m_0 > \beta$ ). On utilise la Proposition 1.10 avec  $A = I$ ,  $A_m = I_m$  et avec la fonction  $f|_{I_m}$ . Il est très facile de voir que les intervalles  $I_m$  satisfont les 3 hypothèses de la Proposition 1.10. Il est évident aussi que  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $I_m$  pour tout  $m$  (car  $f$  se prolonge par continuité, si nécessaire, sur l'intervalle compact  $\overline{I_m}$ ). On a

$$\int_{I_m} |f(x)| dx = \int_{\beta}^m e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha m} - e^{\alpha \beta}}{\alpha}.$$

Comme  $\alpha < 0$  alors cette expression admet une limite pour  $m \rightarrow +\infty$ , ce qui montre que  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $I$ . En plus

$$\int_I f(x) dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha m} - e^{\alpha \beta}}{\alpha} = -\frac{e^{\alpha \beta}}{\alpha}$$

ce qui donne le résultat.

ii) On pose  $J_m = [-m, \beta]$  si  $\beta \in I$  ou  $J_m = [-m, \beta[$  si  $\beta \notin I$  avec  $m \in \mathbb{N}$  assez grand (on peut prendre par exemple  $m \geq m_0$  avec  $m_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $m_0 > -\beta$ ). On utilise la Proposition 1.10 avec  $A = J$ ,  $A_m = J_m$  et avec la fonction  $f|_{J_m}$ . Il est très facile de voir que les intervalles  $J_m$  satisfont les 3 hypothèses de la Proposition 1.10. Il est évident aussi que  $f$  est intégrable Lebesgue sur  $J_m$  pour tout  $m$  (car  $f$  se prolonge par continuité, si nécessaire, sur l'intervalle compact  $\overline{J_m}$ ). On a

$$\int_{J_m} |f(x)| dx = \int_{-m}^{\beta} e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha \beta} - e^{-\alpha m}}{\alpha}.$$

Cette expression tend vers  $+\infty$  quand  $m \rightarrow +\infty$ , ce qui nous dit que  $f$  n'est pas intégrable Lebesgue sur  $J$ .

2. Le cas  $\alpha > 0$  ; la preuve est analogue et est laissée en exercice.

□

**Théorème 1.2.** (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) Soit  $A \subset X$ ,  $f_k : A \rightarrow \mathbb{C}$  une suite des fonctions intégrables sur  $A$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. On suppose que

i) :  $f_k(y) \rightarrow f(y)$  pour  $k \rightarrow +\infty$ ,  $\mu$ -p.p.  $y \in A$  (convergence simple  $\mu$ -presque partout de  $f_k$  vers  $f$ ).

ii) : Il existe  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  fonction intégrable avec  $g(y) \geq 0$ ,  $\mu$ -p.p.  $y \in A$  telle que

$$|f_k(y)| \leq g(y), \quad \mu - p.p. y \in A, \quad \forall k \geq k_0$$

avec  $k_0 \in \mathbb{N}$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $A$  et en plus

$$\int_A f_k d\mu \rightarrow \int_A f d\mu, \text{ pour } k \rightarrow +\infty.$$

**Remarque 1.13.** Dans la suite nous allons utiliser uniquement l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue (ou l'intégrale de Lebesgue). Alors par commodité on dira "intégrable" ou "intégrale" à la place de "intégrable Lebesgue" ou "intégrale de Lebesgue".

Nous donnons maintenant un résultat qui permet de ramener le calcul d'une intégrale de Lebesgue à deux variables au calcul de deux intégrales de Lebesgue à une variable.

**Théorème 1.3.** (Théorème de Fubini 2D)

Soit  $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on introduit l'ensemble appelé  $x$  - section de  $A$  :

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}, (x, y) \in A\} \subset \mathbb{R}$$

et nous notons  $B = \{x \in \mathbb{R}, A_x \neq \emptyset\} \subset \mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in B$  nous introduisons la fonction  $f_x : A_x \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$f_x(y) = f(x, y) \quad \forall y \in A_x.$$

Nous avons

1. Si  $f$  est intégrable sur  $A$  alors pour presque tout  $x \in B$  la fonction  $f_x$  est intégrable sur  $A_x$ . En plus, la fonction

$$x \in B \mapsto \int_{A_x} f_x(y) dy \in \mathbb{C} \tag{1.5}$$

est intégrable sur  $B$  et on a

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_B \left( \int_{A_x} f_x(y) dy \right) dx. \tag{1.6}$$

2. Réciproquement, si pour presque tout  $x \in B$  la fonction  $f_x$  est intégrable sur  $A_x$  et si la fonction définie en (1.5) est intégrable sur  $B$  alors  $f$  est intégrable sur  $A$  et on a l'égalité (1.6).

**Remarque 1.14.** 1. Dans le résultat précédent on peut échanger les rôles des  $x$  et  $y$ .

2. Il y a aussi un "Théorème de Fubini 3D" analogue au théorème précédent qui permet de ramener le calcul d'une intégrale à trois variables au calcul d'une intégrale double et d'une intégrale simple, donc finalement (grâce au Théorème de Fubini 2D) à une succession de trois intégrales simples. Plus généralement, on peut ramener le calcul d'une intégrale en dimension  $m+n$  au calcul d'une intégrale en dimension  $m$  et une en dimension  $n$ , avec  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . Pour cela il suffit de réécrire le Théorème 1.3 avec  $A \subset \mathbb{R}^{m+n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $A_x \subset \mathbb{R}^m$  et  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

**Exemple :**

Nous avons très souvent la situation suivante :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in ]\alpha, \beta[, a(x) \leq y \leq b(x)\}$$

avec  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}, \alpha < \beta$  et  $a, b : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions continues avec  $a < b$ .

Avec les notations du Théorème 1.3 nous avons  $B = ]\alpha, \beta[$  et  $A_x = [a(x), b(x)], \forall x \in B$ , donc la formule (1.6) devient

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

En particulier si  $A = ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[$  est un rectangle, éventuellement non borné, de  $\mathbb{R}^2$  alors

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left( \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx$$

**Remarque :** dans le membre de droite de l'égalité précédente on intègre d'abord en  $y$ , ensuite en  $x$ ; précisons que nous pouvons inverser l'ordre d'intégration, le résultat restant le même.

Nous finissons cette section en donnant une formule très utile de **changement des variables** dans l'intégrale de Lebesgue.

Rappelons d'abord la notion suivante :

**Définition 1.7.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction de classe  $C^1$ , où  $m \in \mathbb{N}^*$ . On note  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$  avec  $h_1, \dots, h_m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $x \in \Omega$  on définit la **matrice Jacobienne** de  $h$  en  $x$  comme étant la matrice notée  $J_h(x)$  à  $m$  lignes et  $n$  colonnes donnée par

$$(J_h(x))_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Nous avons :

**Théorème 1.4.** (Formule de changement des variables, résultat admis!) Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $\varphi : U \rightarrow V$  une fonction de classe  $C^1$  satisfaisant les propriétés suivantes :

1.  $\varphi$  est bijective.
2.  $J_\varphi(x)$  est une matrice inversible pour tout  $x \in U$   
(c'est à dire  $\det(J_\varphi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in U$ ).

Considérons la fonctions  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  et la fonction  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  obtenue de  $f$  par la formule

$$g = (f \circ \varphi) |\det(J_\varphi)|$$



Alors  $f$  est intégrable sur  $V$  si et seulement si  $g$  est intégrable sur  $U$  et on a

$$\int_V f(x)dx = \int_U g(y)dy$$

c'est à dire

$$\int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y)) |\det(J_\varphi(y))| dy.$$

### Rappels coordonnées polaires :

On introduit la fonction  $\varphi_2 : [0, +\infty[ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} \rightarrow \varphi_2(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \end{pmatrix}$$

Il est évident que  $\varphi_2$  est de classe  $C^\infty$ . Nous rappelons que  $\varphi_2$  est une fonction surjective. Elle n'est pas injective à cause de l'égalité  $\varphi_2(0, \theta) = 0, \forall \theta \in [0, 2\pi]$  ou de l'égalité  $\varphi_2(\rho, 0) = \varphi_2(\rho, 2\pi), \forall \rho \geq 0$ . Nous rappelons que la restriction de  $\varphi_2$  sur  $]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[$  est une fonction injective.

### Exemple d'utilisation du Théorème 1.4 :

Pour un  $r > 0$  fixé nous considérons  $B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$  le disque ouvert centrée en 0 et de rayon  $r$  et on se propose de calculer  $\lambda_2(B(0, r))$  (donc l'aire du disque).

Nous avons

$$\lambda_2(B(0, r)) = \int_{B(0, r)} 1 dx$$

donc tout revient à calculer cette dernière intégrale. Il est difficile d'appliquer directement le Théorème de Fubini sur  $B(0, r)$  et il sera préférable d'appliquer la formule de changement des variables.

Il est clair que  $B(0, r) = \varphi_2([0, r[ \times [0, 2\pi])$  mais on ne peut pas utiliser directement ceci à cause du manque de bijectivité et du fait que  $[0, r[ \times [0, 2\pi]$  n'est pas un ensemble ouvert. On fera alors l'artifice suivant : on introduit l'ouvert  $V \subset \mathbb{R}^2$  avec  $V = B(0, r) \setminus D$  où  $D = [0, r[ \times \{0\} \subset B(0, r)$ . Comme  $D$  est de mesure de Lebesgue nulle alors

$$\lambda_2(B(0, r)) = \lambda_2(V).$$

Nous avons donc

$$\lambda_2(B(0, r)) = \lambda_2(V) = \int_V 1 dx. \quad (1.7)$$

Pour calculer cette dernière intégrale nous avons  $V = \varphi_2(U)$  avec  $U = ]0, r[ \times ]0, 2\pi[$  et nous remarquons que  $\varphi_2$  est une bijection entre les ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ . La matrice Jacobienne de  $\varphi_2$  est donnée par

$$J_{\varphi_2}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Nous avons  $\det(J_{\varphi_2}(\rho, \theta)) = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho > 0$ ,  $\forall (\rho, \theta) \in U$ .

Nous pouvons alors appliquer le Théorème 1.4 et nous avons

$$\int_V 1 dx = \int_U |\det(J_{\varphi_2})| d\rho d\theta = \int_U \rho d\rho d\theta. \quad (1.8)$$

Il est facile d'appliquer le Théorème de Fubini pour calculer cette dernière intégrale :

$$\int_U \rho d\rho d\theta = \int_0^r \left( \int_0^{2\pi} \rho d\theta \right) d\rho = \int_0^r 2\pi\rho d\rho = \pi r^2.$$

Avec (1.7) et (1.8) nous retrouvons la formule bien connue :

$$\lambda_2(B(0, r)) = \pi r^2.$$

## 1.5 Les espaces de Lebesgue

Dans la suite l'ensemble  $\mathbb{K}$  désigne soit  $\mathbb{R}$  soit  $\mathbb{C}$ .

Rappelons les définitions suivantes :

**Définition 1.8.** *Supposons que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  (le plus souvent on va considérer  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). On dit qu'une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, +\infty[$  est une **norme** sur  $E$  si*

1.

$$\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall u \in E$$

2.

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in E \quad (\text{l'inégalité triangulaire})$$

3.

$$u = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \|u\| = 0.$$

On dit qu'un espace vectoriel  $E$  muni d'une norme est un **espace vectoriel normé**. Rappelons enfin qu'un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé et **complet** (c'est à dire, il a la propriété que toute suite de Cauchy est convergente).

Dans toute cette section  $A$  désigne un sous-ensemble non-vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $p$  est tel que  $1 \leq p \leq +\infty$ .

**Cas 1)**  $1 \leq p < +\infty$ .

On définit l'ensemble

$$L^p(A, \mathbb{K}) = \left\{ u : A \rightarrow \mathbb{K}, \int_A |u(x)|^p dx < +\infty \right\}.$$

avec la convention qu'on "ne distingue pas" comme éléments de  $L^p(A, \mathbb{K})$  deux fonctions qui sont égales presque partout.

Par exemple, la fonction  $u$  définie sur  $A$  qui est égale partout à zéro sauf dans un point

où elle vaut 1, est considérée comme l'élément zero de  $L^p(A, \mathbb{K})$  (on confond cette fonction avec la fonction 0).

La raison de cette convention supplémentaire est le fait que nous voulons que  $L^p(A, \mathbb{K})$  soit un *espace de Banach* muni de la norme  $\|u\|_{L^p(A, \mathbb{K})} = \left[ \int_A |u(x)|^p dx \right]^{1/p}$ . Alors il doit satisfaire une propriété essentielles :  $\|u\|_{L^p(A, \mathbb{K})} = 0 \implies u = 0$ ; si  $u$  est tel que  $\|u\|_{L^p(A, \mathbb{K})} = 0$  alors en utilisant **L8**) on déduit  $u = 0$  mais pas nécessairement partout sur  $A$  mais seulement *p.p.*  $x \in A$ ; c'est pourquoi on doit confondre toute fonction égale presque partout à zero avec la fonction zero.

La définition complète et rigoureuse de  $L^p(A, \mathbb{K})$  fait appel à la notion de *classes d'équivalence* et ne sera pas donnée dans ce cours.

On a le résultat suivant (sans preuve) :

**Proposition 1.11.** *L'ensemble  $L^p(A, \mathbb{K})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , avec les opérations habituelles sur les fonctions : “+” et “.” (produit entre scalaire et fonction); en fait il faut voir  $L^p(A, \mathbb{K})$  comme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de  $A$  à valeurs dans  $K$ .*

*En plus  $L^p(A, \mathbb{K})$  muni de la norme*

$$u \in L^p(A, \mathbb{K}) \mapsto \|u\|_{L^p(A, \mathbb{K})} = \left( \int_A |u(x)|^p \right)^{1/p} \in [0, +\infty[$$

*est un espace de Banach.*

**Notation :** on note dans ce cours  $L^p(A) = L^p(A, \mathbb{R})$ , mais dans la littérature on peut trouver aussi la notation  $L^p(A)$  pour  $L^p(A, \mathbb{C})$ .

**Exemple :** *Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction. Si  $A$  est borné et  $f$  est une fonction bornée alors  $f \in L^p(A, \mathbb{K})$ . (car  $|f|^p$  est bornée, donc intégrable sur  $A$  qui est borné).*

*En particulier : si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble non vide, ouvert et borné alors on a*

$$C(\overline{\Omega}, \mathbb{K}) \subset L^p(\Omega, \mathbb{K})$$

*car si  $u \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{K})$  alors  $u$  est borné (par le Théorème de Weierstrass car  $\overline{\Omega}$  est un ensemble compact dans  $\mathbb{R}^n$ ).*

*En revanche, nous n'avons pas en général  $C(\Omega, \mathbb{K}) \subset L^p(\Omega, \mathbb{K})$ .*

*Exemples : en classe*

**Cas 2)**  $p = +\infty$ .

On définit

$$L^\infty(A, \mathbb{K}) = \{u : A \rightarrow \mathbb{K}, \exists a \in [0, +\infty[ \text{ tel que } |u(x)| \leq a, \text{ p.p. } x \in A\}.$$

avec la même convention : on confond les fonctions égale presque partout.

Il est facile de voir que toute fonction bornée est un élément de  $L^\infty(A)$ . Un exemple de

fonction non bornée qui est dans  $L^\infty(A)$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et qui vaut 0 partout, sauf dans les points  $n \in \mathbb{N}^*$  où elle vaut  $n$ . La propriété de la définition est vraie pour tout  $a \geq 0$ ; en fait on *confond* cette fonction avec la fonction nulle.

On a encore le résultat suivant (sans preuve) :

**Proposition 1.12.** *L'ensemble  $L^\infty(A, \mathbb{K})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , avec les opérations habituelle sur les fonctions : “+” et “.” (produit entre scalaire et fonction); en fait il faut voir  $L^\infty(A, \mathbb{K})$  comme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de  $A$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .*

*En plus  $L^\infty(A, \mathbb{K})$  muni de la norme*

$$u \in L^\infty(A, \mathbb{K}) \mapsto \|u\|_{L^\infty(A, \mathbb{K})} = \inf\{a \geq 0, \quad |u(x)| \leq a, \text{ p.p. } x \in A\}$$

*est un espace de Banach.*

La norme  $\|u\|_{L^\infty(A, \mathbb{K})}$  s'appelle aussi *le supremum essentiel* de  $|u|$  et le plus souvent elle n'est autre que  $\sup_{x \in A} |u(x)|$ .

On utilisera la notation :  $L^\infty(A) = L^\infty(A, \mathbb{R})$ .

**Exemple :** *Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction bornée alors  $f \in L^\infty(A, \mathbb{K})$  (même si  $A$  n'est pas un ensemble borné).*

**Remarque 1.15.** *Soit une fonction  $u$  définie presque partout sur  $A$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , c'est à dire : il existe  $A_1 \subset A$  tel que  $A - A_1$  est négligeable et  $u : A_1 \rightarrow \mathbb{K}$ . Notons par  $\tilde{u}$  un prolongement de  $u$  sur l'ensemble  $A$  par une valeur quelconque, par exemple 0. Si la fonction  $\tilde{u}$  est un élément de  $L^q(A, \mathbb{K})$  avec  $q \in [1, +\infty]$ , alors on va dire par abus de langage que  $u$  est un élément de  $L^q(A, \mathbb{K})$ . Donc  $u$  peut être vu comme un élément de  $L^q(A, \mathbb{K})$  même s'il est défini seulement presque partout sur  $A$ .*

*Remarquer que la valeur par laquelle on prolonge  $u$  sur  $A$  n'a aucune importance.*

Nous finissons ce chapitre par une inégalité très utile (sans preuve) :

**Lemme 1.1.** *(Inégalité de Holder)*

*Soient  $p, q \in [1, +\infty]$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et deux fonctions  $f \in L^p(A, \mathbb{K})$  et  $g \in L^q(A, \mathbb{K})$ . Alors le produit  $fg$  est un élément de  $L^1(A, \mathbb{K})$  et on a*

$$\|fg\|_{L^1(A, \mathbb{K})} \leq \|f\|_{L^p(A, \mathbb{K})} \|g\|_{L^q(A, \mathbb{K})}.$$

**Remarque 1.16.** *En prenant dans le lemme précédent  $p = q = 2$  nous obtenons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\int_A |fg| \leq \sqrt{\int_A |f|^2} \cdot \sqrt{\int_A |g|^2} \quad \forall f, g \in L^2(A, \mathbb{K}).$$

**Remarque 1.17.** *Il est possible de définir plus généralement, de manière analogue, des espaces de Lebesgue par rapport à une mesure  $\mu$  quelconque; nous avons choisi ici de nous restreindre au cas particulier de la mesure de Lebesgue.*

# Chapitre 2

## Quelques éléments de géométrie analytique : courbes et surfaces

Dans tout ce chapitre  $n$  est un nombre naturel avec  $n \geq 2$ .

### 2.1 Courbe paramétrée et intégrale sur une courbe

#### 2.1.1 Paramétrisations et courbes

**Définition 2.1.** 1. On appelle **arc paramétré** de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  (on peut aussi dire **paramétrisation** de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ ) un couple  $([a, b], \gamma)$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$ .

2. On appelle **support** de l'arc paramétré  $([a, b], \gamma)$  l'ensemble  $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ ; on l'appelle aussi **courbe** de classe  $C^1$  associée à l'arc paramétré  $([a, b], \gamma)$ . On dira aussi que  $([a, b], \gamma)$  est une paramétrisation de la courbe  $\gamma([a, b])$ .
3. Le point  $\gamma(a) \in \mathbb{R}^n$  est appelé **point initial** de la paramétrisation tandis que le point  $\gamma(b) \in \mathbb{R}^n$  est appelé **point final**. Le sous-ensemble  $\gamma(]a, b[) \subset \mathbb{R}^n$  s'appelle **partie intérieure** de la paramétrisation.
4. On dit que l'arc paramétré  $([a, b], \gamma)$  est **simple** si la restriction de  $\gamma$  sur  $]a, b[$  est une fonction injective.

**Remarque 2.1.** 1. Un arc paramétré permet de décrire la courbe support associée mais aussi de donner un "sense de parcours" sur cette courbe.

2. Par commodité on peut dire que l'arc paramétré est  $\gamma$  au lieu de dire que c'est  $([a, b], \gamma)$ .
3. On peut rencontrer dans la littérature de spécialité d'autres noms que celui de arc paramétré : **courbe paramétrée**, **chemin**, etc ..

**Exemple 2.1.** (paramétrisation d'un graph de fonction)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . Nous considérons le

graph de  $f$  qui est l'ensemble suivant en  $\mathbb{R}^2$  :

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in [a, b]\}.$$

La définition de  $\Gamma$  nous suggère la paramétrisation suivante pour  $\Gamma$  : on introduit la fonction  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\gamma(t) = (t, f(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

Alors  $([a, b], \gamma)$  est un arc paramétré dont le support est le graph  $\Gamma$  de  $f$ . On remarque que cet arc paramétré est simple.

**Exemple 2.2.** (paramétrisation d'un cercle)

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$ . On considère dans le plan  $\mathbb{R}^2$  le cercle de centre  $\alpha$  et de rayon  $r$  :

$$C(\alpha, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_1 - \alpha_1)^2 + (x_2 - \alpha_2)^2 = r^2\}.$$

On introduit la fonction  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + r \cos t \\ \alpha_2 + r \sin t \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Alors  $([0, 2\pi], \gamma)$  est un arc paramétré de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$  (on observe que  $\gamma$  est de classe  $C^\infty$ ). Il est facile de voir que le support de cet arc paramétré (ou sa courbe associée) est le cercle  $C(\alpha, r)$ .

Remarquons que le point initial et le point final coïncident et que cette paramétrisation est simple et "parcourt" le cercle dans le sens trigonométrique.

Si on veut paramétriser seulement une partie du cercle, on peut prendre  $t$  dans un intervalle strictement inclus en  $[0, 2\pi]$  (par exemple on peut paramétriser un demi-cercle, en prenant  $t \in [0, \pi]$ ). On peut aussi prendre  $t$  dans un intervalle qui inclut strictement  $[0, 2\pi]$  et dans ce cas une partie au moins du cercle peut être "parcourue" plusieurs fois ; une telle paramétrisation n'est pas simple.

**Exemple 2.3.** (Paramétrisation d'un segment)

Considérons le segment  $[AB]$  qui unit deux points  $A, B \in \mathbb{R}^n$ , avec  $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)^T$  et  $B = (B_1, B_2, \dots, B_n)^T$ . Il faut voir ce segment comme une courbe dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Nous avons par définition

$$[AB] = \{A + t(B - A), \quad t \in [0, 1]\}.$$

Cette définition nous suggère qu'on peut définir une paramétrisation de  $[AB]$  de la forme  $([0, 1], \gamma)$  avec  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par

$$\gamma(t) = A + t(B - A) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Cet arc paramétré "parcourt" le segment de  $A$  vers  $B$ . Si on veut une paramétrisation qui "parcourt" le même segment mais de  $B$  vers  $A$ , alors il faut inverser  $A$  et  $B$  dans l'expression de  $\gamma$ .

**Remarque 2.2.** La paramétrisation générale donnée ci-dessus n'est pas la seule possible pour un segment donné. Par exemple, pour  $A = (-2, 1)$  et  $B = (4, 1)$  on peut donner une paramétrisation qui s'inspire de l'Exemple 2.1, où on peut voir le segment comme le graph de la fonction constante égale à 1. On peut donner alors une paramétrisation plus simple pour  $[AB]$  qui est  $([-2, 4], \gamma_1)$  avec  $\gamma_1 : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$\gamma_1(t) = (t, 1), \quad \forall t \in [-2, 4].$$

D'autre part, en suivant la méthode générale décrite dans l'Exemple 2.3 on peut donner une paramétrisation "standard" pour  $[AB]$  qui est  $([0, 1], \gamma_2)$  avec  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$\gamma_2(t) = (-2, 1) + t[(4, 1) - (-2, 1)] = (-2 + 6t, 1) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Ces deux paramétrisations du même segment sont en quelque sorte "équivalentes". Nous donnons dans la suite une notion générale d'équivalence entre deux paramétrisations :

**Définition 2.2.** Soient  $([a, b], f)$  et  $([c, d], g)$  deux paramétrisations de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $([a, b], f)$  est équivalente à  $([c, d], g)$  s'il existe une fonction  $\Phi : [a, b] \rightarrow [c, d]$  telle que :

1.  $\Phi$  est de classe  $C^1$  et  $\Phi'(t) > 0, \forall t \in [a, b]$
2.  $\Phi$  est bijective
3.  $g \circ \Phi = f$ .

**Remarque 2.3.** 1. La condition 1) nous dit que  $\Phi$  est une fonction strictement croissante donc injective.

2. On peut remplacer la condition 2) de la définition précédente par

$$\Phi(a) = c \text{ et } \Phi(b) = d$$

(car cette condition avec le fait que  $\Phi$  est strictement croissante nous donne la surjectivité, ce qui avec l'injectivité nous donne la bijectivité de  $\Phi$ ; inversement, la bijectivité de  $\Phi$  nous donne la surjectivité, qui nous donne la condition ci-dessus).

3. Il est facile de voir que si  $([a, b], f)$  est équivalente à  $([c, d], g)$  alors  $([c, d], g)$  est équivalente à  $([a, b], f)$  (preuve très simple : on utilise la fonction réciproque  $\Phi^{-1}$  de  $\Phi$  ; nous avons  $\Phi^{-1}$  de classe  $C^1$  car  $\Phi' \neq 0$ ,  $(\Phi^{-1})' > 0$ ,  $\Phi^{-1}$  bijective et le fait que  $f \circ \Phi^{-1} = g$ . **Rappel :**  $(\Phi^{-1})'(s) = \frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(s))}$ . Alors on dira tout simplement que les deux paramétrisations sont équivalente, sans que l'ordre ait de l'importance.

**Exemple :** Considérons la paramétrisation  $([0, 2\pi], g)$  de l'Exemple 2.2, avec  $\alpha = (0, 0)$  et  $r = 1$ , donc

$$g(s) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix}, \quad \forall s \in [0, 2\pi].$$

Cette paramétrisation a comme support le cercle de centre  $(0, 0)$  et rayon 1 en  $\mathbb{R}^2$ . Une paramétrisation équivalente en est  $([0, 1], f)$  avec  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$t \in [0, 1] \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Montrons que les paramétrisations  $([0, 1], f)$  et  $([0, 2\pi], g)$  sont équivalentes. Considérons la fonction  $\Phi : [0, 1] \rightarrow [0, 2\pi]$  définie par

$$\Phi(t) = 2\pi t \quad \forall t \in [0, 1].$$

Il est clair qu'on a

1.  $\Phi$  de classe  $C^1$  et  $\Phi' > 0$  car  $\Phi'(t) = 2\pi, \quad \forall t \in [0, 1]$
2.  $\Phi$  bijective car  $\Phi$  est strictement croissante avec  $\phi(0) = 0$  et  $\Phi(1) = 2\pi$
3.  $g \circ \Phi = f$ , car

$$g(\Phi(t)) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix} = f(t) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Ceci finit la preuve de l'équivalence.

**Proposition 2.1.** Soient  $([a, b], f)$  et  $([c, d], g)$  deux paramétrisations de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  équivalentes. Alors on a

- a) Les courbes associées aux deux paramétrisations coïncident
- b) Les deux paramétrisations "parcourent la courbe associée dans le même sens".

**Remarque :** L'affirmation "parcourent la courbe associée dans le même sens" n'est pas très précise mathématiquement, elle est plutôt intuitive : cela veut dire que si un point  $x$  de la courbe est "pris" avant un autre point  $y$  de la courbe par une paramétrisation, alors c'est le cas aussi pour l'autre paramétrisation.



*Preuve de la partie a) de la Proposition :* Soit la fonction  $\Phi$  comme dans la Définition 2.2. Notons les ensembles :

$$A = \{f(t), t \in [a, b]\}$$

et

$$C = \{g(s), s \in [c, d]\}$$

et on doit montrer que  $A = C$ . On va procéder par double inclusion.

Soit  $y = g(s) \in C$  avec  $s \in [c, d]$  fixé. Alors il existe  $t \in [a, b]$  tel que  $s = \Phi(t)$ . On a alors

$$y = g(s) = g(\Phi(t)) = f(t) \in A.$$

ce qui montre  $C \subset A$ . Pour montrer  $A \subset C$  on considère  $x = f(t) \in A$  avec  $t \in [a, b]$  fixé. On a alors

$$x = f(t) = g(\Phi(t)) = g(s)$$

avec  $s = \Phi(t) \in [c, d]$ , donc  $x \in C$ ; ceci finit la preuve.

**Définition 2.3.** Soit  $([a, b], \gamma)$  une paramétrisation  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ . On appelle **paramétrisation opposée** de  $([a, b], \gamma)$  la paramétrisation  $C^1$  qui s'écrit  $([a, b], \gamma^O)$  avec  $\gamma^O : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\gamma^O(t) = \gamma(a + b - t), \quad \forall t \in [a, b].$$

**Remarque 2.4.** 1. On pourra dire pour simplifier que c'est  $\gamma^O$  qui est la paramétrisation opposée de  $\gamma$ .

2. Observer que  $\gamma^O(a) = \gamma(b)$  et  $\gamma^O(b) = \gamma(a)$  (le point initial de  $\gamma^O$  est le point final de  $\gamma$  et vice versa).

3. Les deux paramétrisations  $\gamma$  et  $\gamma^O$  ont la même courbe support, mais elles parcourent cette courbe au sens contraire.

**Exemple :** Considérons la paramétrisation standard pour le cercle de centre 0 et rayon 1 en  $\mathbb{R}^2$  qui est  $([0, 2\pi], \gamma)$  avec

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Alors la paramétrisation opposée est  $([0, 2\pi], \gamma^O)$  avec

$$\gamma^O(t) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)) = (\cos t, -\sin t), \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Cet arc paramétré parcourt le cercle dans le sens inverse trigonométrique.

**Définition 2.4.** Soit  $([a, b], \gamma)$  une paramétrisation  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ . On appelle **tangente** ou **vecteur tangent** en  $t_0 \in [a, b]$  à la paramétrisation  $\gamma$  le vecteur  $\gamma'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ .

**Remarques :** Le nom "tangente" est motivé par le fait que pour  $\gamma'(t_0) \neq 0$  la différence entre les points de la courbe support de  $([a, b], \gamma)$  et les points de la droite passant par  $\gamma(t_0)$  et ayant  $\gamma'(t_0)$  comme vecteur directeur est "très petite" si on est proche de  $\gamma(t_0)$ . En effet comme  $\gamma$  est de classe  $C^1$  on a

$$\gamma(t) - [\gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)] = o(t - t_0) \quad \text{pour } t \rightarrow t_0.$$

(le terme  $o(s)$  désigne un terme tel que  $o(s)/s \rightarrow 0$  pour  $s \rightarrow 0$ ).

**Définition 2.5.** Soit  $([a, b], \gamma)$  une paramétrisation de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ .

1. Soit  $t_0 \in [a, b]$  et  $M_0 = \gamma(t_0) \in \mathbb{R}^2$ . On dit que  $t_0$  est **régulier** pour la paramétrisation  $\gamma$  si  $\gamma'(t_0) \neq 0$  (tangente non nulle en  $t_0$ ).
2. On dit que la paramétrisation  $\gamma$  est **régulière** si tout paramètre  $t \in ]a, b[$  est régulier pour  $\gamma$ .

**Définition 2.6.** Soit  $([a, b], \gamma)$  une paramétrisation de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$  et  $t_0 \in [a, b]$  un point régulier pour  $\gamma$ . On appelle **vecteur normal** à  $\gamma$  (ou à la courbe  $\gamma([a, b])$ ) et au point  $t_0$  le vecteur  $\nu^0 = \nu^0(t_0) \in \mathbb{R}^2$  défini par

$$\nu^0 = \frac{1}{\|\gamma'(t_0)\|} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t_0) \\ -\gamma_1'(t_0) \end{pmatrix}$$

**Remarque 2.5.** 1. Le vecteur  $\nu^0$  est bien défini (car  $\|\gamma'(t_0)\| \neq 0$ )

et de norme égale à 1 (car  $\|\nu^0\| = \frac{\|(\gamma_2'(t_0), -\gamma_1'(t_0))\|}{\|(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))\|} = 1$ ).

2. Le vecteur tangent et le vecteur normal sont orthogonaux, car  $\langle \gamma'(t_0), \nu^0 \rangle = 0$  (facile à vérifier).
3. En paramétrisant la même courbe par la paramétrisation opposée  $\gamma^O$  on inverse l'orientation du vecteur tangent ainsi que du vecteur normal (car  $\frac{d}{dt}\gamma^O(t) = \frac{d}{dt}\gamma(a+b-t) = -\gamma'(a+b-t)$ ).
4. Dans le cas où la paramétrisation  $\gamma$  est simple alors pour tout  $t_0 \in ]a, b[$  on peut dire "tangente en  $\gamma(t_0)$  à  $\gamma$ " au lieu de dire "tangente en  $t_0$  à  $\gamma$ ". De la même manière on peut dire "vecteur normal en  $\gamma(t_0)$  à  $\gamma$ " au lieu de dire "vecteur normal en  $t_0$  à  $\gamma$ " (car  $t_0$  est déterminé par  $\gamma(t_0)$ ).

**Exemple :**

On considère la paramétrisation "standard" du cercle de centre  $(0, 0)$  et rayon 1 en  $\mathbb{R}^2$ , donnée par  $([0, 2\pi], \gamma)$  avec  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Pour un point  $t \in [0, 2\pi]$  fixé la tangente en  $t$  (ou en  $\gamma(t)$ ) sera le vecteur

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Comme  $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [0, 2\pi]$  (car  $\|\gamma'(t)\| = 1 \neq 0$ ), alors la paramétrisation  $\gamma$  est régulière. On peut alors définir le vecteur normal à  $\gamma$ , en tout point  $t$  (ou  $\gamma(t)$ ), qui sera

$$\nu = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) = (\cos t, \sin t) = \gamma(t).$$

## 2.1.2 Courbes de classe $C^1$ par morceaux

Nous avons besoin souvent dans la pratique de considérer une courbe que s'écrit comme l'union de plusieurs courbes de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.7.** Considérons un ensemble  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ .

1. On dit que  $\Gamma$  est une **courbe de classe  $C^1$  par morceaux** en  $\mathbb{R}^n$  si :
  - soit  $\Gamma$  est une courbe de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$
  - soit  $\Gamma$  s'écrit sous la forme

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j, \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \quad (2.1)$$

où  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$  sont des courbes de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$

2. Supposons que  $\Gamma$  s'écrit sous la forme (2.1). On dit que  $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_k$  est une **paramétrisation de classe  $C^1$  par morceaux** de  $\Gamma$  si pour tout  $j = 1, 2, \dots, k$  on a que  $\gamma_j$  est une paramétrisation de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  de  $\Gamma_j$ .
3. on dit qu'une paramétrisation  $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  d'une courbe de classe  $C^1$  par morceaux est **simple** si
  - dans le cas où  $k = 1$  :  $\gamma$  est une paramétrisation simple (en tant que paramétrisation de classe  $C^1$ )
  - dans le cas où  $k \geq 2$  :  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  sont simples et en plus les parties intérieures des  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  sont deux à deux disjointes.

**Exemple 2.4.** Pour paramétriser la frontière du triangle  $ABC$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  avec  $A = (0, 0)$ ,  $B = (1, 0)$ ,  $C = (0, 1)$  nous considérons une paramétrisation pour chacun des segments  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$ . Les paramétrisations sont  $([0, 1], \gamma_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  avec

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad \forall t \in [0, 1]$$

(pour le segment  $[AB]$ )

$$\gamma_2(t) = (1 - t, t), \quad \forall t \in [0, 1]$$

(pour le segment  $[BC]$ )

$$\gamma_3(t) = (0, 1 - t), \quad \forall t \in [0, 1]$$

(pour le segment  $[CA]$ ).

Alors  $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$  sera une paramétrisation de classe  $C^1$  par morceaux de la frontière  $\Gamma = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$  du triangle  $ABC$ . En plus cette paramétrisation est simple.

### 2.1.3 Intégrales sur des courbes

#### Intégrales sur des courbes de classe $C^1$

Dans ce paragraphe nous considérons  $([a, b], \gamma)$  un **arc paramétré** de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  et  $\Gamma = \gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$  sa courbe associée.

Rappelons que pour tout  $t \in [a, b]$  le vecteur  $\gamma'(t)$  désigne le vecteur tangent en  $t$  à  $\gamma$ . Rappelons aussi que si  $(\overline{D}, \gamma)$  est simple, alors on peut confondre  $\gamma$  et sa courbe  $\Gamma$  associée (à laquelle on "ajoute" un sens de parcours).

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert tel que la courbe  $\Gamma$  associée à  $([a, b], \gamma)$  soit incluse dans  $\Omega$ , c'est à dire

$$\gamma([a, b]) \subset \Omega.$$

On a la définition suivante :

**Définition 2.8.** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs scalaires. On appelle **intégrale sur la courbe**  $\gamma$  de  $f$  noté  $\int_{\gamma} f(x) d\sigma$  ou  $\int_{\Gamma} f(x) d\sigma$  le nombre réel défini (s'il existe) par

$$\int_{\gamma} f(x) d\sigma = \int_{\Gamma} f(x) d\sigma = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Un exemple important d'une telle intégrale est la **longueur** de l'arc paramétré  $\gamma$  notée  $L(\gamma)$  qui se définit par la formule

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} 1 d\sigma.$$

c'est à dire

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

**Remarque 2.6.** Si l'arc paramétré est simple alors la longueur de l'arc coïncide avec la longueur de la courbe associée à cet arc.

Une justification approximative de cette affirmation est la suivante : si on a une discrétisation très fine de  $[a, b]$  donnée par

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b \quad \text{avec} \quad N \in \mathbb{N}, \quad N \text{ très grand}$$

alors on a

$$\begin{aligned} \text{Longueur}(\gamma) &= \sum_{k=0}^{N-1} \text{Longueur}(\gamma[t_{k-1}, t_k]) \sim \sum_{k=0}^{N-1} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \sim \\ &\sim \sum_{k=0}^{N-1} \|\gamma'(t_k)\| (t_{k+1} - t_k) = \sum_{k=0}^{N-1} (t_{k+1} - t_k) \|\gamma'(t_k)\| \sim \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \end{aligned}$$

**Remarque 2.7.** On admet le résultat suivant : l'intégrale donnée dans la Définition 2.8 est en fait une intégrale par rapport à une mesure  $\sigma$  sur  $\Gamma$  (voir Chapitre 1),  $\sigma : \mathcal{P}(\Gamma) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$\sigma(\Gamma_1) = L(\Gamma_1) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt$$

pour tout sous-ensemble  $\Gamma_1 \subset \Gamma$  défini par  $\Gamma_1 = \gamma(I)$  avec  $I \subset [a, b]$ .

**Exemple :**

Considérons l'arc paramétré donné dans l'Exemple 2.3 pour la paramétrisation d'un segment. Nous avons :  $\gamma'(t) = B - A, \quad \forall t \in [0, 1]$  donc

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \|B - A\| dt = \|B - A\|.$$

### Intégrale sur des courbes de classe $C^1$ par morceaux

Les notions d'intégrale sur une courbe et longueur d'une courbe peuvent s'étendre à des courbes de classe  $C^1$  par morceaux.

**Définition 2.9.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cdots \cup \Gamma_k \subset \mathbb{R}^n$  une courbe de classe  $C^1$  par morceaux et  $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_k$  une paramétrisation de  $\Gamma$ .

1. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble non vide et ouvert tel que  $\Gamma \subset \Omega$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On définit alors l'intégrale de  $f$  sur la courbe  $\gamma$  par la formule

$$\int_{\gamma} f(x) d\sigma = \int_{\Gamma} f(x) d\sigma = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(x) d\sigma.$$

2. On appelle **longueur** de la paramétrisation  $\gamma$ , noté  $L(\gamma)$ , le nombre réel et positif défini par

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + \cdots + L(\gamma_k) = \sum_{j=1}^k L(\gamma_j).$$

**Remarque 2.8.** Dans le cas où la paramétrisation  $\gamma$  est simple alors la longueur de la paramétrisation  $\gamma$  coïncide avec la longueur de la courbe  $\Gamma$ .

Nous finissons par le résultat suivant de **linéarité** de l'intégrale sur une courbe :

**Proposition 2.2.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues,  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  deux constantes et  $\gamma$  une paramétrisation de classe  $C^1$  par morceaux en  $\mathbb{R}^n$ . Alors on a

$$\int_{\gamma} (a_1 f_1 + a_2 f_2) d\sigma = a_1 \int_{\gamma} f_1 d\sigma + a_2 \int_{\gamma} f_2 d\sigma.$$

*Démonstration.* La preuve est très simple, elle utilise la linéarité de l'intégrale et est laissée en exercice.  $\square$

## 2.2 Nappes paramétrées et surfaces

### 2.2.1 Quelques rappels d'analyse et d'algèbre

#### Quelques opérateurs différentiels

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert non vide,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ .

1. Si  $m = 1$  (donc la fonction  $f$  est à valeurs scalaires) on appelle **gradient** de  $f$  noté  $\nabla f$  la fonction  $\nabla f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^T, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

2. Si  $m = n$  (donc la fonction  $f$  est un champ de vecteurs) on appelle **divergence** de  $f$  notée  $\nabla \cdot f$  (on la note parfois  $div(f)$ ) la fonction  $\nabla \cdot f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$(\nabla \cdot f)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

3. Si  $m = n = 3$  (donc la fonction  $f$  est un champ de vecteurs tridimensionnel) on appelle **rotationnel** de  $f$  noté  $\nabla \wedge f$  (on le note parfois  $rot(f)$ ) la fonction  $\nabla \wedge f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$(\nabla \wedge f)(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \Omega.$$

## Indépendance, orthogonalité et produit vectoriel

On suppose ici  $n \geq 2$ .

1. On dit que deux vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$  sont **indépendants** s'ils ne sont pas colinéaires (donc il n'existe pas  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que  $y = \beta x$  ou  $x = \beta y$ ).
2. On dit que deux vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$  sont **orthogonaux** (noté  $x \perp y$ ) si  $x \cdot y = 0$
3. Soient  $x = (x_1, x_2, x_3)^T, y = (y_1, y_2, y_3)^T$  deux vecteurs en  $\mathbb{R}^3$ . On appelle **produit vectoriel** de  $x$  et  $y$  le vecteur dans  $\mathbb{R}^3$  noté  $x \wedge y$  défini par

$$x \wedge y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

4. Rappelons les résultats suivants sur le produit vectoriel :
  - Deux vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^3$  sont indépendants si et seulement si  $x \wedge y \neq 0$ .
  - Le vecteur  $x \wedge y$  est orthogonal sur chacun des vecteurs  $x$  et  $y$ , donc  $(x \wedge y) \perp x$  et  $(x \wedge y) \perp y$ .
  - Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^3$  on a  $y \wedge x = -x \wedge y$  (antisymétrie).

### 2.2.2 Définitions et exemples de nappes paramétrées

Dans tout cette section on suppose  $n \geq 3$ .

**Définition 2.10.** 1. On appelle **nappe paramétrée** de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  le couple  $(\bar{D}, \gamma)$  où  $D \subset \mathbb{R}^2$  est un ensemble non vide, ouvert et borné et  $\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction appartenant à  $C^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$  (on peut dire par commodité que la nappe paramétrée est  $\gamma$  au lieu de dire que c'est  $(\bar{D}, \gamma)$ ).

2. On appelle **support** de  $(\overline{D}, \gamma)$  ou **surface** de classe  $C^1$  associée à la nappe paramétrée  $(\overline{D}, \gamma)$ , l'ensemble  $\gamma(\overline{D})$  qui est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . On dira aussi que la nappe  $\gamma$  est une paramétrisation de la surface  $\gamma(\overline{D})$ .
3. Soit  $\partial D \subset \mathbb{R}^2$  la frontière de l'ouvert  $D$ . L'ensemble  $\gamma(\partial D) \in \mathbb{R}^n$  est appelé **frontière** de la paramétrisation  $\gamma$  ou de la surface  $\gamma(\overline{D})$ ; l'ensemble  $\gamma(D) \subset \mathbb{R}^n$  s'appelle **partie intérieure** de la paramétrisation  $\gamma$  ou de la surface  $\gamma(\overline{D})$ .
4. On dit que la nappe paramétrée est **simple** si la restriction de  $\gamma$  sur l'ouvert  $D$  est injective.

Il y a aussi une notion d'**équivalence** des nappes, notion qui ne sera pas abordée dans ce cours.

**Exemple 2.5.** (nappes des fonctions) Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble non vide, ouvert et borné et  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\overline{D}$ . On sait alors que l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in \overline{D}, z = g(x, y)\}$$

est une surface en  $\mathbb{R}^3$  (on lui dit aussi "graphe" de la fonction  $g$ ).

On peut voir cette surface comme la surface associée à la nappe paramétrée de classe  $C^1$   $(\overline{D}, \gamma)$  avec  $\gamma : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par

$$\gamma(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \overline{D}.$$

On dira aussi que  $\gamma$  est la nappe de la fonction à valeurs scalaires  $g$ .

Par exemple  $D$  peut être une région sur la Terre (supposée plane) et  $g$  peut représenter l'**altitude** en tout point de  $\overline{D}$ . Alors la surface  $\gamma(\overline{D})$  représente le relief dans cette région.

### Rappels coordonnées sphérique :

On introduit la fonction  $h : [0, +\infty[ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow h(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\varphi) \cos \theta \\ \rho \cos(\varphi) \sin \theta \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Il est évident que  $h$  est de classe  $C^\infty$ . Nous rappelons que  $h$  est une fonction surjective. Elle n'est pas injective à cause par exemple de l'égalité  $h(\rho, 0, \varphi) = h(\rho, 2\pi, \varphi)$ ,  $\forall (\rho, \varphi) \in [0, +\infty[ \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Nous rappelons que la restriction de  $h$  sur  $]0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  est une fonction injective.

Nous rappelons aussi que pour tout  $r > 0$  fixé, l'image de  $\{r\} \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  par  $h$  n'est autre que la sphère centrée en 0 et de rayon  $r$  en  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 2.6.** (sphère en  $\mathbb{R}^3$ ). Soit  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $r > 0$  et posons  $D = ]0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On introduit l'application  $\gamma : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\gamma(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + r \cos \varphi \cos \theta \\ \alpha_2 + r \cos \varphi \sin \theta \\ \alpha_3 + r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \forall (\theta, \varphi) \in D.$$

Il est clair que  $\gamma \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$ , donc  $(\overline{D}, \gamma)$  est une nappe paramétrée de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . D'autre part remarquons que

$$\gamma(\theta, \varphi) - \alpha = h(r, \theta, \varphi), \quad \forall (\theta, \varphi) \in \overline{D}$$

c'est à dire

$$\gamma(\theta, \varphi) = \alpha + h(r, \theta, \varphi), \quad \forall (\theta, \varphi) \in \overline{D}.$$

Alors par le rappel ci-dessus sur les coordonnées sphériques, l'image de  $\overline{D}$  par  $\gamma$  n'est autre que la sphère centrée en  $\alpha$  et rayon  $r$  translatée par  $\alpha$ . On en déduit

$$\gamma(\overline{D}) = S(\alpha, r)$$

où  $S(\alpha, r) = \{x \in \mathbb{R}^3, \|x - \alpha\| = r\} \subset \mathbb{R}^3$  est la sphère centrée en  $\alpha$  et de rayon  $r$  en  $\mathbb{R}^3$ . Donc on peut dire que  $\gamma$  fournit une paramétrisation de cette sphère générale.

Il est clair aussi que  $\gamma$  est une fonction injective sur  $[0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et que l'image de  $[0, 2\pi[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par  $\gamma$  est  $S(\alpha, r) \setminus \{P_N, P_S\}$ ; ici  $P_N = \gamma(\theta, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 + r \end{pmatrix}$  (pôle nord)

et  $P_S = \gamma(\theta, -\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 - r \end{pmatrix}$  (pôle sud).

### 2.2.3 Plan tangent et normale à une surface

On suppose dans cette section que  $D$  est un ensemble non vide, ouvert et borné en  $\mathbb{R}^2$  et  $(\overline{D}, \gamma)$  est une nappe paramétrée de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$ , donc

$$(u, v) \in \overline{D} \mapsto \gamma(u, v) \in \mathbb{R}^3.$$

Nous notons  $\Sigma = \gamma(\overline{D})$  la surface support de  $\gamma$ . Soit  $(u_0, v_0) \in \overline{D}$  un point fixé et notons  $M^0 = \gamma(u_0, v_0) \in \Sigma$ . On suppose que la fonction

$$u \mapsto \gamma(u, v_0) \in \mathbb{R}^3$$

peut être définie sur un intervalle du type  $[a, b]$  avec  $u_0 \in [a, b]$ . En notant par  $\gamma_1$  cette application alors  $([a, b], \gamma_1)$  est la paramétrisation  $C^1$  d'une courbe que nous notons par  $\Gamma_1$ , qui contient le point  $M^0$  et qui est incluse dans la surface  $\Sigma$ .



La tangente à la courbe  $\gamma_1$  en  $u_0$  (ou en  $\gamma_1(u_0) = \gamma(u_0, v_0)$  si  $\gamma_1$  est simple) est le vecteur  $\gamma'_1(u_0) = \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0)$ . Nous notons ce vecteur par  $p^0$ , donc  $p^0 = \frac{\partial \gamma}{\partial u}(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ .

De la même manière, on suppose que la fonction

$$v \mapsto \gamma(u_0, v) \in \mathbb{R}^3$$

peut être définie sur un intervalle du type  $[c, d]$  avec  $v_0 \in [c, d]$ . En notant par  $\gamma_2$  cette application alors  $([c, d], \gamma_2)$  est la paramétrisation  $C^1$  d'une courbe que nous notons par  $\Gamma_2$ , qui contient elle aussi le point  $M^0$  et qui est incluse dans la surface  $\Sigma$ .

La tangente à la courbe  $\gamma_2$  en  $v_0$  (ou en  $\gamma_2(v_0) = \gamma(u_0, v_0)$  si  $\gamma_2$  est simple) est le vecteur  $\gamma'_2(v_0) = \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0)$ . Nous notons ce vecteur par  $q^0$ , donc  $q^0 = \frac{\partial \gamma}{\partial v}(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$ .

**Définition 2.11.** Avec les notations ci-dessus, on dit que :

1. le point  $(u_0, v_0)$  est **régulier** pour la paramétrisation  $\gamma$  (on peut dire : pour la surface  $\Sigma$ ) si  $p^0 \wedge q^0 \neq 0$ , c'est à dire, si les vecteurs  $p^0$  et  $q^0$  sont indépendants.
2. la nappe paramétrisée  $(\bar{D}, \gamma)$  est **régulière** (ou on peut dire que la surface associée  $\Sigma$  est régulière) si tout  $(u_0, v_0) \in D$  est régulier.

Dans le cas où  $(u_0, v_0)$  est régulier alors on peut introduire le sous-espace vectoriel de dimension 2 en  $\mathbb{R}^3$ , noté  $Vect(p^0, q^0)$  engendré par les vecteurs  $p^0$  et  $q^0$ , c'est à dire

$$Vect(p^0, q^0) = \{ap^0 + bq^0, \quad a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

**Définition 2.12.** Supposons que  $M^0$  est régulier ; alors

1. L'espace vectoriel  $E = Vect(p^0, q^0)$  est appelé **plan tangent** à la surface  $\Sigma$  (ou à la nappe paramétrée  $\gamma$ ) en  $(u_0, v_0)$ .
2. On appelle **vecteur normal** à la nappe  $\gamma$  (ou à la surface  $\Sigma$ ) et en  $(u_0, v_0)$  le vecteur noté  $\nu^0 \in \mathbb{R}^3$  défini par

$$\nu^0 = \frac{p^0 \wedge q^0}{\|p^0 \wedge q^0\|}$$

**Remarque 2.9.** 1. Le vecteur  $\nu^0$  est bien défini et non nul, car  $p^0 \wedge q^0 \neq 0$ .

2. Le vecteur  $\nu^0$  satisfait les propriétés :

- i)  $\nu^0 \perp p^0$  et  $\nu^0 \perp q^0$  ce qui implique  $\nu^0 \perp Vect(p^0, q^0)$   
(donc le vecteur normal  $\nu^0$  est orthogonal au plan tangent en  $M^0$ ).
- ii)  $\|\nu^0\| = 1$  (car  $\|\nu^0\| = \frac{1}{\|p^0 \wedge q^0\|} \|p^0 \wedge q^0\| = 1$ ).

3. On peut inverser la direction de  $\nu^0$  en inversant l'ordre des variables  $u$  et  $v$ , car dans ce cas l'ordre des vecteurs  $p^0$  et  $q^0$  sera inversée, ce qui change le signe de  $p^0 \wedge q^0$ .

4. Dans le cas où la nappe  $\gamma$  est simple on peut dire "plan tangent en  $M^0$ " au lieu de dire "plan tangent en  $(u_0, v_0)$ ", et de même, "normale en  $M^0$ " au lieu de "normale en  $(u_0, v_0)$ ".

5. En fait le vrai plan tangent à  $\Sigma$  en  $M^0$  est obtenu par une translation :

$$M^0 + \text{Vect}(p^0, q^0) = \{\gamma(u_0, v_0) + ap^0 + bq^0, \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

**Exemple 2.7.** Reprenons l'Exemple 2.6 de la nappe paramétrée  $(\bar{D}, \gamma)$  pour la sphère en  $\mathbb{R}^3$  centrée en  $\alpha$  et de rayon  $r$ . Pour tout  $(\theta, \alpha) \in \bar{D}$  on a

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}(\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \cos \theta \\ -r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Un calcul immédiat nous donne

$$\left( \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \right) (\theta, \alpha) = \begin{pmatrix} r^2 \cos^2 \varphi \cos \theta \\ r^2 \cos^2 \varphi \sin \theta \\ r^2 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

En posant  $p = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}$  et  $q = \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}$ , on peut écrire pour tout  $(\theta, \varphi) \in \bar{D}$  :

$$p \wedge q = r \cos \varphi [\gamma(\theta, \varphi) - \alpha].$$

Comme  $\|\gamma(\theta, \varphi) - \alpha\| = r > 0$  alors  $\gamma(\theta, \varphi) - \alpha \neq 0$ .

Ceci nous dit que le point  $\gamma(\theta, \varphi) \in S(\alpha, r)$  est régulier si et seulement si  $\cos \varphi \neq 0$ , c'est à dire  $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$ . On déduit alors que cette nappe paramétrée est régulière.

On aura alors  $\|p \wedge q\| = r^2 \cos \varphi$  (car  $\cos \varphi \geq 0$ ) donc pour  $\varphi \neq \pm \frac{\pi}{2}$  on a

$$\nu = \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|} = \frac{1}{r} [\gamma(\theta, \varphi) - \alpha].$$

En particulier pour la sphère centrée en  $0$  et de rayon  $1$  (ce qui correspond à  $\alpha = 0$  et  $r = 1$ ) on trouve

$$\nu = \gamma(\theta, \varphi).$$

**Remarque :** La paramétrisation choisie nous donne un vecteur normal à la frontière qui est orienté vers l'**extérieur** du domaine entouré par la sphère, qui est la boule  $B(\alpha, r)$  centrée en  $\alpha$  et de rayon  $r$ .

La justification du fait que vecteur normal à la frontière dans un point  $M$  arbitraire de la sphère est orienté vers l'extérieur est la suivante : le vecteur  $\nu$  est colinéaire et orienté

dans le même sens avec un vecteur qui unit un point intérieur  $A$  de la sphère (qui est dans notre cas le centre de la sphère) avec le point  $M$  sur la surface de la sphère. Il faut aussi que tout le segment  $[AM]$  reste dans l'adhérence de la boule  $B(\alpha, r)$ , ce qui est le cas ici. On peut échanger l'ordre des paramètres, c'est à dire, choisir comme domaine des paramètres  $D = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \times ]0, 2\pi[$  et comme nappe paramétrée la fonction

$$\gamma(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + r \cos \varphi \cos \theta \\ \alpha_2 + r \cos \varphi \sin \theta \\ \alpha_3 + r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \forall (\varphi, \theta) \in D.$$

Dans ce cas on aura

$$\nu = -\frac{1}{r}[\gamma(\varphi, \theta) - \alpha].$$

et le vecteur normal sera orienté vers l'intérieur de la boule  $B(\alpha, r)$ .

## 2.2.4 Surfaces de classe $C^1$ par morceaux

Nous avons besoin souvent dans la pratique de considérer une surface que s'écrit comme l'union de plusieurs surfaces de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.13.** *Considérons un ensemble  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ .*

1. On dit que  $\Sigma$  est une **surface de classe  $C^1$  par morceaux** en  $\mathbb{R}^n$  si :
  - soit  $\Sigma$  est une surface de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$
  - soit  $\Sigma$  s'écrit sous la forme

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_k = \bigcup_{j=1}^k \Sigma_j, \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \quad (2.2)$$

où  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$  sont des surfaces de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$ .

2. Supposons que  $\Sigma$  s'écrit sous la forme (2.2). On dit que  $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_k$  est une **paramétrisation de classe  $C^1$  par morceaux** de  $\Sigma$  si pour tout  $j = 1, 2, \dots, k$  on a que  $\gamma_j$  est une paramétrisation de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  de  $\Sigma_j$ .
3. On dit qu'une paramétrisation  $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  d'une surface de classe  $C^1$  par morceaux est **simple** si
  - dans le cas où  $k = 1$  :  $\gamma$  est une paramétrisation simple
  - dans le cas où  $k \geq 2$  :  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  sont simples et en plus les parties intérieures des  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  sont deux à deux disjointes.

## 2.2.5 Intégrales sur des surfaces

### Intégrales sur des surfaces de classe $C^1$

Dans ce paragraphe nous considérons  $(\overline{D}, \gamma)$  une **nappe paramétrée** de classe  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$ , avec  $D$  un ouvert et borné en  $\mathbb{R}^2$  et  $\Sigma = \gamma(\overline{D})$  sa surface associée. Nous notons par  $p$  et  $q$  les fonctions continues définies sur  $\overline{D}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$  définies par

$$p = p(u, v) = \frac{\partial \gamma}{\partial u}, \quad \forall (u, v) \in \overline{D}$$

et

$$q = q(u, v) = \frac{\partial \gamma}{\partial v}, \quad \forall (u, v) \in \overline{D}.$$

Pour tout  $(u, v) \in \overline{D}$  régulier on note par  $\nu$  le vecteur normal défini par

$$\nu = \nu(u, v) = \frac{p \wedge q}{\|p \wedge q\|}.$$

**Remarque 2.10.** Si la nappe paramétrée  $(\overline{D}, \gamma)$  est simple, alors

1. on peut confondre  $\gamma$  et sa surface  $\Sigma$  associée (à laquelle on "ajoute" une orientation de la normale  $\nu$ )
2. on peut voir  $\nu$  comme une fonction définie sur la surface  $\Sigma$  au lieu de la voir comme une fonction définie sur  $\overline{D}$ . Plus précisément, pour tout  $x \in \overline{D}$  on peut poser  $\tilde{\nu}(x) = \nu(u, v)$  où  $(u, v)$  est l'unique élément tel que  $x = \gamma(u, v)$ ; mais par commodité on va noter  $\nu$  au lieu de noter  $\tilde{\nu}$ ; on peut alors "confondre"  $\nu$  et  $\tilde{\nu}$ .

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ensemble ouvert tel que la surface associée à  $(\overline{D}, \gamma)$  soit incluse dans  $\Omega$ , c'est à dire

$$\gamma(\overline{D}) \subset \Omega.$$

On a la définition suivante :

**Définition 2.14.** Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs scalaires. On appelle **intégrale de surface** de  $f$  sur  $\gamma$  noté  $\int_{\gamma} f(x) d\sigma$  ou  $\int_{\Sigma} f(x) d\sigma$  le nombre réel défini (s'il existe) par

$$\int_{\gamma} f(x) d\sigma = \int_{\Sigma} f(x) d\sigma = \int_D f(\gamma(u, v)) \|(p \wedge q)(u, v)\| dudv.$$

Un exemple important d'une telle intégrale est l'aire de la surface  $\Sigma$ , notée  $Aire(\Sigma)$  qui se définit par la formule

$$Aire(\Sigma) = \int_{\Sigma} 1 d\sigma.$$

**Remarque 2.11.** En analogie avec l'intégrale sur une courbe, on a le résultat suivant qu'on admet sans preuve : l'intégrale donnée dans la Définition 2.14 est en fait une intégrale par rapport à une mesure  $\sigma$  sur  $\Sigma$  (voir Chapitre 1),  $\sigma : \mathcal{P}(\Sigma) \rightarrow [0, +\infty]$  définie par

$$\sigma(\Sigma_1) = Aire(\Sigma_1) = \int_{D_1} \|(p \wedge q)(u, v)\| dudv$$

pour tout sous-ensemble  $\Sigma_1 \subset \Sigma$  défini par  $\Sigma_1 = \gamma(D_1)$  avec  $D_1 \subset \overline{D}$ .

### Un exemple de calcul de l'aire d'une surface :

Soit  $\Sigma$  la sphère centrée en  $\alpha \in \mathbb{R}^3$  et rayon  $r > 0$ , décrite par la paramétrisation de l'Exemple 2.6 nous avons comme dans l'Exemple 2.7 :

$$p \wedge q = r(\cos \varphi)[\gamma(\theta, \varphi) - \alpha].$$

Un calcul immédiat nous donne  $\|\gamma(\theta, \varphi) - \alpha\| = r$  ce qui permet d'obtenir

$$\|(p \wedge q)(\theta, \varphi)\| = r^2 \cos \varphi, \quad \forall (\theta, \varphi) \in \overline{D}.$$

Nous avons alors

$$\text{Aire}(\Sigma) = \int_D r^2 \cos(\varphi) d\theta d\varphi.$$

Avec le Théorème de Fubini on a

$$\text{Aire}(\Sigma) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{2\pi} r^2 \cos(\varphi) d\theta \right) d\varphi = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cdot 2\pi d\varphi = 4\pi r^2.$$

Un exemple important en physique d'intégrale de surface est la notion de flux à travers une surface, donné dans la définition suivante :

**Définition 2.15.** *On suppose que la nappe paramétrée  $(\overline{D}, \gamma)$  est simple et régulière. Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction à valeurs vectorielles (un champ des vecteurs). On appelle **flux** de  $g$  à travers la surface  $\gamma$  (ou  $\Sigma$ ) noté  $\int_\gamma g(x) \cdot \nu d\sigma$  ou  $\int_\Sigma g(x) \cdot \nu d\sigma$  le nombre réel défini (quand il existe) par*

$$\int_\gamma g(x) \cdot \nu d\sigma = \int_\Sigma g(x) \cdot \nu d\sigma = \int \int_D g(\gamma(u, v)) \cdot \nu(u, v) \|(p \wedge q)(u, v)\| dudv.$$

### Remarques :

1. On utilise ici la convention de la Remarque 2.10 qui consiste à considérer  $\nu$  comme une fonction de  $x \in \Sigma$  ou comme une fonction de  $(u, v)$ .
2. En fait le flux de  $g$  n'est autre que l'intégrale de surface de la fonction  $g \cdot \nu$  définie sur  $\Sigma$ .

**Exemple :** Pour un fluide incompressible de densité constante supposée égale à 1 le débit du fluide à travers la surface  $\Sigma$  à un instant de temps donné est par définition le flux de la vitesse à travers  $\Sigma$ . Donc si  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  est la vitesse du fluide, où  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est un ensemble ouvert tel que  $\Sigma \subset \Omega$ , alors le débit  $D$  du fluide à travers  $\Sigma$  est donné par la formule

$$D = \int_\Sigma v(x) \cdot \nu d\sigma.$$

## Intégrales sur des surfaces de classe $C^1$ par morceaux

L'intégrale de surface introduites dans le paragraphe précédent peut s'étendre de manière naturelle au cas d'une surface de classe  $C^1$  par morceaux.

Supposons dans ce paragraphe que  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  est tel que

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 2$$

et que  $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_k$  est une paramétrisation **de classe  $C^1$  par morceaux** de  $\Sigma$ . On suppose que  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est un ensemble non vide et ouvert, tel que  $\Sigma \subset \Omega$ . Considérons aussi une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors nous définissons (si elle existe) l'intégrale de surface de  $f$  sur  $\gamma$  par la formule

$$\int_{\gamma} f(x) d\sigma = \int_{\Sigma} f(x) d\sigma = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} f(x) d\sigma.$$

Nous définissons aussi l'aire de  $\gamma$  (ou de  $\Sigma$ ), noté  $Aire(\gamma)$  par

$$Aire(\gamma) = Aire(\gamma_1) + Aire(\gamma_2) + \dots + Aire(\gamma_k) = \sum_{j=1}^k Aire(\gamma_j).$$

Comme pour les courbes, nous avons encore la linéarité de l'intégrale de surface :

$$\int_{\gamma} (a_1 f_1 + a_2 f_2) d\sigma = a_1 \int_{\gamma} f_1 d\sigma + a_2 \int_{\gamma} f_2 d\sigma.$$

## 2.3 Formules de passage d'un type d'intégrale à un autre ; formules de Green

Nous avons le résultat suivant qui permet de réduire le calcul d'une intégrale double au calcul d'une intégrale sur une courbe.

**Théorème 2.1.** (*formule de Green en dimension 2*)

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble ouvert,  $U \subset \Omega$  un ensemble non vide, ouvert et borné et  $\Gamma = \partial U$  la frontière de  $U$  avec  $\Gamma \subset \Omega$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$ ,  $f = (f_1, f_2)$ .

Supposons que  $\Gamma$  est une courbe de classe  $C^1$  par morceaux et soit  $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  une paramétrisation de  $\Gamma$ . On suppose en outre que

1.  $\gamma$  est simple (voir Définition 2.7)
2. le vecteur normal associé à la paramétrisation  $\gamma_j$  de classe  $C^1$  est orienté à l'extérieur de  $U$ , pour tout  $j = 1, \dots, k$ .

Alors on a

$$\int_U \nabla \cdot f(x) dx = \int_{\gamma} f(x) \cdot \nu(x) d\sigma.$$

*Idée de la preuve :* Nous donnons une idée de la preuve dans un cas plus simple, où on suppose que l'ensemble  $U$  est de la forme :

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad \alpha_m(x_1) \leq x_2 \leq \alpha_M(x_1)\}$$

et aussi

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2, \quad \beta_m(x_2) \leq x_1 \leq \beta_M(x_2)\}.$$

avec  $\alpha_m, \alpha_M, \beta_m, \beta_M$  des fonctions de classe  $C^1$ . Nous pouvons alors écrire  $\gamma$  de deux manières différentes :

$$\gamma = p_m \vee p_M^O$$

ou

$$\gamma = q_m^O \vee q_M$$

avec

$$p_m(t) = (t, \alpha_m(t)) \quad \text{et} \quad p_M(t) = (t, \alpha_M(t)), \quad \forall t \in [a_1, b_1]$$

et

$$q_m(t) = (\beta_m(t), t) \quad \text{et} \quad q_M(t) = (\beta_M(t), t), \quad \forall t \in [a_2, b_2].$$

Le formule de Fubini nous donne

$$\int_U \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx = \int_{a_2}^{b_2} \int_{\beta_m(x_2)}^{\beta_M(x_2)} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} [f_1(\beta_M(x_2), x_2) - f_1(\beta_m(x_2), x_2)] dx_2. \quad (2.3)$$

De manière analogue on obtient

$$\int_U \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{\alpha_m(x_1)}^{\alpha_M(x_1)} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} [f_2(x_1, \alpha_M(x_1)) - f_2(x_1, \alpha_m(x_1))] dx_1. \quad (2.4)$$

D'autre part remarquons que le vecteur tangent sur  $q_M$  est  $q'_M(t) = (\beta'_M(t), 1)$  donc le vecteur normal sur  $q_M$  est

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta'_M(t))^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta'_M(t) \end{pmatrix}$$

Ce vecteur est orienté vers l'extérieur de  $U$  car  $\langle \nu, e_1 \rangle > 0$ . Nous avons alors (on note  $\nu_i$  la  $i$ -ème composante de  $\nu$ ) :

$$\int_{q_M} f_1(x) \nu_1(x) d\sigma = \int_{a_2}^{b_2} f_1(\beta_M(t), t) \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta'_M(t))^2}} \sqrt{1 + (\beta'_M(t))^2} dt$$

donc

$$\int_{q_M} f_1(x) \nu_1(x) d\sigma = \int_{a_2}^{b_2} f_1(\beta_M(t), t) dt. \quad (2.5)$$

Par le même type de calcul nous obtenons

$$\int_{q_m^O} f_1(x) \nu_1(x) d\sigma = - \int_{a_2}^{b_2} f_1(\beta_m(t), t) dt. \quad (2.6)$$

$$\int_{p_m} f_2(x) \nu_2(x) d\sigma = - \int_{a_1}^{b_1} f_2(t, \alpha_m(t)) dt. \quad (2.7)$$

$$\int_{p_M^O} f_2(x) \nu_2(x) d\sigma = \int_{a_1}^{b_1} f_2(t, \alpha_M(t)) dt. \quad (2.8)$$

En combinant (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8) on obtient le résultat.

**Exemple :**

Le résultat suivant nous permet de réduire le calcul d'une intégrale triple au calcul d'une intégrale de surface. La preuve est assez proche de la preuve du résultat précédent.

**Théorème 2.2.** (formule de Green en dimension 3)

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un ensemble ouvert,  $U \subset \Omega$  un ensemble non vide, ouvert et borné et  $\Sigma = \partial U$  la frontière de  $U$  avec  $\Sigma \subset \Omega$ .

Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ .

On suppose que  $\Sigma$  est une surface de classe  $C^1$  par morceaux et soit  $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  une paramétrisation de  $\Sigma$ . On suppose en outre que

1. la paramétrisation  $\gamma$  est simple
2. pour tout  $j = 1, \dots, k$  la paramétrisation  $\gamma_j$  est choisie de telle sorte que la normale  $\nu$  à la nappe  $\gamma_j$  soit orientée vers l'extérieur de  $U$ .

Nous avons alors l'égalité

$$\int_U \nabla \cdot f(x) dx = \int_{\gamma} f(x) \cdot \nu(x) d\sigma.$$

Ce résultat est connu aussi sous le nom de **formule d'Ostrogradski**.

**Exemple :** Soit  $f$  le champ de vecteur vitesse à un moment donné d'un fluide incompressible ; nous avons alors  $\nabla \cdot f = 0$  sur  $\Omega$ . Rappelons que le débit du fluide sur  $\Sigma$  n'est autre que le flux de  $f$  sur  $\Sigma$  (on suppose que la densité du fluide est constante égale à 1). On déduit alors du Théorème 2.2 que le débit du fluide sur  $\Sigma$  est égal à 0 (car  $\int_{\Sigma} f \cdot \nu d\sigma = \int_U \nabla \cdot f dx = \int_U 0 dx = 0$ ).



# Chapitre 3

## Transformée de Laplace et de Fourier

### 3.1 Fonctions complexes de variables complexes

#### 3.1.1 Quelques rappels

On rappelle l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

avec  $i$  le "nombre imaginaire" satisfaisant  $i^2 = -1$ .

Sur  $\mathbb{C}$  nous avons les opérations usuelles  $+$  et  $\cdot$  :

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que le **conjugué complexe** d'un nombre complexe  $z = x + iy$  est  $\bar{z} = x - iy$ .

Nous avons :

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

ceci pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Rappelons aussi l'**isomorphisme canonique**  $\varphi : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}^2$  défini par

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \mapsto \quad \varphi(z) = (x, y) = (Re(z), Im(z)) \in \mathbb{R}^2$$

qui permet "d'identifier"  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$ .

Alors des notions topologiques comme *ensemble ouvert*, *ensemble fermé*, *convergence ...* en  $\mathbb{C}$  sont données par leurs analogues en  $\mathbb{R}^2$  à travers l'isomorphisme  $\varphi$ .

Cela veut dire par exemple que pour un ensemble  $U \subset \mathbb{C}$  nous avons :

$U$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  si et seulement si  $\varphi(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$

$U$  est un fermé de  $\mathbb{C}$  si et seulement si  $\varphi(U)$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$

On a aussi

$$z_k \rightarrow z \text{ en } \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(z_k) \rightarrow \varphi(z) \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Pour tout  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  on définit la *valeur absolue* de  $z$  notée  $|z|$  par

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Remarquons qu'on a :  $|x + iy| = \|\varphi(x + iy)\| = \|(x, y)\| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Définition 3.1.** 1. Soit  $a \in \mathbb{C}$  et  $\rho > 0$ .

On appelle **disque ouvert** de centre  $a$  et rayon  $\rho$  le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  :

$$D(a, \rho) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - a| < \rho\}.$$

(par convention si  $\rho = +\infty$  on pose  $D(a, +\infty) = \mathbb{C}$ .)

On appelle **disque fermé** de centre  $a$  et rayon  $\rho$  le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  :

$$\overline{D(a, \rho)} = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - a| \leq \rho\}.$$

On appelle **cercle** de centre  $a$  et rayon  $\rho$  le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  :

$$C(a, \rho) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - a| = \rho\}.$$

On appelle  $D(0, 1)$  le **disque ouvert unité** et  $C(0, 1)$  le **cercle unité**.

2. Un sous-ensemble  $U$  non vide de  $\mathbb{C}$  est dit **ouvert** si pour tout  $x \in U$  il existe  $r > 0$  tel que  $D(x, r) \subset U$ . Par convention l'ensemble vide  $\emptyset$  est considéré comme ouvert.
3. Soit  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$  (on note aussi  $(z_n)$ ) une suite complexe et  $z \in \mathbb{C}$ . On dit que  $z_n$  **converge** vers  $z$  pour  $n \rightarrow \infty$  (noté  $z_n \rightarrow z$ ) si  $|z_n - z| \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow \infty$ .
4. Un sous-ensemble  $F$  non vide de  $\mathbb{C}$  est dit **fermé** si pour toute suite  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$  et tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z_n \rightarrow z$ , on a  $z \in F$ . Par convention l'ensemble vide  $\emptyset$  est considéré aussi fermé.

### 3.1.2 Fonctions holomorphes

Nous allons considérer des fonctions "de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$ ", donc des fonctions définies sur un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Dans la suite nous définissons des notions de continuité et de dérivabilité qui sont analogues à celles pour les fonctions réelles à variables réelles.

**Définition 3.2.** Soit  $B$  un sous-ensemble non-vide de  $\mathbb{C}$  et  $a \in \mathbb{C}$ . On dit que  $a$  est un **point d'accumulation** de  $B$  s'il existe une suite  $(z_n) \subset B$  tel que  $z_n \rightarrow a$ .

**Exemples :**

1. Tout point de  $B$  est un point d'accumulation de  $B$ .
2. Si  $U \subset \mathbb{C}$  est un ouvert et  $x \in U$  alors  $x$  est un point d'accumulation de  $U \setminus \{x\}$  (prendre  $x_n \in D(x, \frac{1}{n}) \setminus \{x\}$ ;  $x_n \in U \setminus \{x\}$  et  $x_n \rightarrow x$ ).

**Définition 3.3.** Soit  $B$  un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C}$  un point d'accumulation de  $B$ ,  $f : B \mapsto \mathbb{C}$  une fonction et  $l \in \mathbb{C}$ . On dit :

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = l$$

si pour toute suite  $(z_n) \subset B$  avec  $z_n \rightarrow a$  on a  $f(z_n) \rightarrow l$ . On montre facilement qu'on a la définition équivalente "avec  $\epsilon$  et  $\delta$ " suivante :  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  tel que si  $z \in B$ ,  $|z - a| < \delta$  alors  $|f(z) - l| < \epsilon$ .

**Définition 3.4.** Soit  $U \subset \mathbb{C}$  et  $f : U \mapsto \mathbb{C}$ .

1. Soit  $a \in U$ . On dit que  $f$  est **continue** en  $a$  si

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a).$$

2. On dit que  $f$  est continue sur  $U$  si elle est continue en tout point  $a \in U$ .

Dans la suite on va beaucoup s'intéresser aux fonctions dérivables.

### Définition et propriétés élémentaires des fonctions holomorphes

**Définition 3.5.** Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert et  $f : U \mapsto \mathbb{C}$ .

1. Soit  $a \in U$ . On dit que  $f$  est **dérivable** en  $a$  si la fonction

$$h \mapsto \frac{1}{h} [f(a + h) - f(a)] \in \mathbb{C}$$

a une limite pour  $h \rightarrow 0$  (remarquer que cette fonction est bien définie au moins dans un ensemble  $D(0, \rho) \setminus \{0\}$  avec  $\rho > 0$  suffisamment petit). Cette limite sera notée  $f'(a)$  ou encore  $\frac{df}{dz}(a)$ . On peut encore écrire

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

2. On dit que  $f$  est **dérivable** sur  $U$  (on dit aussi **holomorphe** sur  $U$ ) si  $f$  est dérivable en tout point  $a \in U$ . On note alors par  $f'$  la fonction  $f' : U \mapsto \mathbb{C}$  qui à tout  $a \in U$  associe  $f'(a) \in \mathbb{C}$ .
3. Si  $f$  est dérivable sur  $U$  et  $f'$  aussi est dérivable sur  $U$  alors on dit que  $f$  est deux fois dérivable sur  $U$ . On note alors  $f'' = (f')'$ .  
Par récurrence on va dire que  $f$  est  $k$  fois dérivable sur  $U$ , avec  $k \in \mathbb{N}^*$  si  $f$  est  $k - 1$  fois dérivable sur  $U$  et en plus la dérivée  $k - 1$  fois de  $f$  est à son tour dérivable sur  $U$ ; on a alors par définition :  $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ . Par convention on pose  $f^{(0)} = f$ .
4. On dit que  $F : U \mapsto \mathbb{C}$  est une **primitive** de  $f$  si  $F$  est holomorphe sur  $U$  et  $F' = f$  sur  $U$ .

**Remarque 3.1.** Il est évident de la définition que  $f$  est dérivable sur  $a$  si et seulement si on a le développement limité à l'ordre 1 de  $f$  en  $a$  : il existe  $b \in \mathbb{C}$  tel que

$$f(a+h) = f(a) + b \cdot h + o(h)$$

où  $o(h)$  désigne une fonction "qui tend vers 0 plus vite que  $h$ ", c'est à dire

$$\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0 \quad \text{pour } h \rightarrow 0.$$

En plus  $b = f'(a)$ .

Les preuves des deux propositions qui suivent se font exactement comme pour les fonctions réelles à variables réelles :

**Proposition 3.1.** Soit  $U \subset \mathbb{C}$  ouvert,  $f : U \mapsto \mathbb{C}$  et  $a \in U$ . Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Proposition 3.2.** Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts dans  $\mathbb{C}$  et  $f : U \mapsto \mathbb{C}$ ,  $g : V \mapsto \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes. Pour les 3 premiers résultats on suppose que l'ouvert  $U \cap V$  est non vide ; alors

1.  $\lambda f + \mu g$  est une fonction holomorphe sur  $U \cap V$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  et on a

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'.$$

2.  $f \cdot g$  est une fonction holomorphe sur  $U \cap V$  et on a

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

3. Si  $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in U \cap V$  alors  $\frac{f}{g}$  est holomorphe sur  $U \cap V$  et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

4. Si  $f(U) \subset V$  alors  $g \circ f$  est holomorphe sur  $U$  et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

5. Supposons que  $f$  est une bijection entre  $U$  et  $V$  et que  $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in U$ . Alors  $f^{-1} : V \mapsto U$  est holomorphe sur  $V$  et on a

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

(Rappelons que  $f^{-1}$  désigne la réciproque de  $f$ ).

**Quelques exemples :**

1. Si  $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  est une fonction constante alors  $f$  est holomorphe et  $f' = 0$  (très facile!).
2. Si  $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  est donnée par  $f(z) = z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $f$  est holomorphe et

$$f'(z) = nz^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

*Démonstration.* On a pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^n - z^n}{h}.$$

D'autre part on a

$$(z+h)^n = z^n + nz^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}h^2 + \dots + h^n$$

ce qui donne le résultat. □

**Conséquence :** Tout polynôme sur  $\mathbb{C}$  est une fonction holomorphe.

3. Si  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C}$  est donnée par  $f(z) = z^{-n} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors  $f$  est holomorphe et

$$f'(z) = -nz^{-n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

*Démonstration.*

$$\left(\frac{1}{z^n}\right)' = \frac{-nz^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{-n-1}.$$

□

**Conséquence :** Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  on a  $(z^k)' = kz^{k-1}$  avec la remarque que pour  $k < 0$  la fonction est définie et holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

4. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  avec  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  nous définissons  $e^z \in \mathbb{C}$  par l'expression  $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

*Propriété importante : (Exercice!)  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ ,  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .*

Considérons la fonction "exponentielle"  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par

$$z \mapsto f(z) = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Nous admettons le résultat suivant :

*$f$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  est  $f'(z) = e^z$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .*

5. Si  $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  est donnée par  $f(z) = \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$  alors

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Montrons que le limite pour  $h \rightarrow 0$  de  $\bar{h}/h$  n'existe pas. En prenant  $h_n = \frac{1}{n}$  on a  $\bar{h}_n/h_n = \frac{1/n}{1/n} = 1 \rightarrow 1$  pour  $n \rightarrow +\infty$ ; ensuite si on prend  $h_n = \frac{1}{n}i$ , alors  $\bar{h}_n/h_n = \frac{-(1/n)i}{(1/n)i} = -1 \rightarrow -1$  pour  $n \rightarrow +\infty$ .

Donc la fonction  $f$  n'est dérivable en aucun point  $z \in \mathbb{C}$ .

## 3.2 Transformée de Laplace (TL)

### 3.2.1 Définition de la transformée de Laplace

Toutes les intégrales qui seront utilisées dans ce chapitre sont des intégrales de Lebesgue. Nous introduisons dans la suite une classe des fonctions dits "localement intégrables". Partout dans la suite  $A$  désigne un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 3.6.** Si  $q$  est tel que  $1 \leq q < +\infty$  on note

$$L_{loc}^q(A, \mathbb{K}) = \{u : A \rightarrow \mathbb{K}, \text{ pour tout compact } B \subset A \text{ on a } u \in L^q(B, \mathbb{K})\}.$$

Ceci est équivalent avec :

$$L_{loc}^q(A, \mathbb{K}) = \{u : A \rightarrow \mathbb{K}, \text{ pour tout compact } B \subset A \text{ on a } \int_B |u(x)|^q dx < +\infty\}.$$

Une fonction  $u$  qui est dans  $L_{loc}^1(A, \mathbb{K})$  est appelée aussi fonction "localement intégrable" sur  $A$ .

**Notation :** On notera dans ce cours  $L_{loc}^q(A) = L_{loc}^q(A, \mathbb{R})$  mais dans la littérature on peut aussi trouver la notation  $L_{loc}^q(A)$  pour  $L_{loc}^q(A, \mathbb{C})$ .

**Remarque 3.2.** 1. Nous avons  $L^q(A, \mathbb{K}) \subset L_{loc}^q(A, \mathbb{K}), \quad \forall q \in [1, +\infty[$

2. Si  $A$  est un ensemble compact alors  $L^q(A, \mathbb{K}) = L_{loc}^q(A, \mathbb{K})$   
(car si  $u \in L_{loc}^q(A, \mathbb{K})$  alors  $u \in L^q(A, \mathbb{K})$  car  $A \subset A$  et  $A$  compact).

**Proposition 3.3.** Pour tout  $q \in [1, +\infty[$  on a

1.  $L_{loc}^q(A, \mathbb{K})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ; c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de  $A$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

2.

$$L_{loc}^q(A, \mathbb{K}) \subset L_{loc}^1(A, \mathbb{K})$$

(plus généralement : si  $q_2 \geq q_1 \geq 1$  alors  $L_{loc}^{q_2}(A, \mathbb{K}) \subset L_{loc}^{q_1}(A, \mathbb{K})$ ).

3. Si  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$  est une fonction bornée sur tout sous-ensemble compact de  $A$  (c'est à dire  $f$  est bornée sur  $B, \forall B$  compact  $\subset A$ ) alors  $f \in L_{loc}^q(A, \mathbb{K})$ .

*Démonstration.* 1. Soient  $f, g \in L_{loc}^q(A, \mathbb{K})$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Si  $B$  est un compact arbitraire avec  $B \subset A$  alors par définition  $f, g \in L^q(B, \mathbb{K})$ . Mais comme  $L^q(B, \mathbb{K})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  alors  $\alpha f + \beta g \in L^q(B, \mathbb{K})$ . Comme  $B$  est arbitraire on a  $\alpha f + \beta g \in L_{loc}^q(A, \mathbb{K})$  ce qui nous dit que  $L_{loc}^q(A, \mathbb{K})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

2. A faire en TD.

3. Soit  $B \subset A$  un compact arbitraire ; comme  $B$  est borné et  $|f|^q$  est borné sur  $B$  alors  $|f|^q$  est intégrable Lebesgue sur  $B$  ce qui montre le résultat. □

**Conséquences :**

1. Toute fonction bornée est dans  $L^q_{loc}(A, \mathbb{K})$ .
- 2.

$$C(A, \mathbb{K}) \subset L^q_{loc}(A, \mathbb{K}).$$

3. Dans le cas particulier  $n = 1$  et  $A =$  un intervalle dans  $\mathbb{R}$  alors toute fonction continue par morceaux sur  $A$  est dans  $L^q_{loc}(A, \mathbb{K})$  (car bornée sur tout sous-ensemble compact de  $A$ ).

**Remarque 3.3.** 1. La convention utilisée pour  $L^q(A, \mathbb{K})$  est encore valable ici : on confond comme éléments de  $L^q_{loc}(A, \mathbb{K})$  deux fonctions qui sont égales presque partout.

2. On ne définit pas de norme sur  $L^q_{loc}(A, \mathbb{K})$ .
3. On a un analogue de la Remarque 1.15 : Même si  $u$  est définie seulement presque partout sur  $A$  on va la voir comme un élément de  $L^q_{loc}(A, \mathbb{K})$  si un prolongement de  $u$  sur  $A$  est un élément de  $L^q_{loc}(A, \mathbb{K})$ .

*Exemples en classe*

Dans toute la suite du cours on appelle **fonction de Heaviside** la fonction  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie comme la fonction **indicatrice** de l'intervalle  $[0, +\infty[$ , donc

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Il est évident que  $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  car  $H$  est bornée.

Nous aurons besoin dans la suite des notions suivantes :

**Définition 3.7.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. On dit que  $f$  est **causale** si  $f(x) = 0$  p.p.  $x < 0$ .

**Notation :**

$$\mathcal{L}_+ = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad f \text{ est causale}\}.$$

**Remarque 3.4.** Si  $f \in L^1_{loc}([0, +\infty[, \mathbb{C})$  alors on peut voir  $f$  comme une fonction de  $\mathcal{L}_+$  en pensant à son prolongement sur  $\mathbb{R}$  par 0 pour  $x < 0$ .

**Définition 3.8.** Soit  $f \in \mathcal{L}_+$  et  $s \in \mathbb{C}$ . On définit (quand cela existe) le nombre complexe suivant :

$$I(f, s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

$I(f, s)$  s'appelle **l'intégrale de Laplace** de  $f$  en  $s$ .

Rappelons que  $I(f, s)$  existe si et seulement si on a

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt < +\infty$$

(rappelons que  $|e^{-st}| = e^{-t \operatorname{Re}(s)}$  car  $s \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$ ).

On voudrais savoir pour quels valeurs de  $s$  la quantité  $I(f, s)$  existe. On commence par le résultat suivant :

**Lemme 3.1.** Soit  $f \in \mathcal{L}_+$ . Supposons qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty.$$

Alors pour tout  $s \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(s) \geq \alpha$  on a  $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt < +\infty$ .

*Démonstration.* On a

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| \exp(-\operatorname{Re}(s)t) dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} \exp([\alpha - \operatorname{Re}(s)]t) dt$$

et on a le résultat attendu, car  $\alpha - \operatorname{Re}(s) \leq 0$  donc  $\exp([\alpha - \operatorname{Re}(s)]t) \leq 1, \quad \forall t \geq 0. \quad \square$

On introduit la notation suivante :

$$\mathcal{L}_a = \left\{ f \in \mathcal{L}_+, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty \right\} \subset \mathcal{L}_+.$$

Ensuite pour tout élément  $f \in \mathcal{L}_a$  on introduit la notation

$$\xi_a(f) = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R}, \quad \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty \} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Si  $f \in \mathcal{L}_+$  et  $f \notin \mathcal{L}_a$  alors par convention on pose  $\xi_a(f) = +\infty$ .

L'élément  $\xi_a(f)$  s'appelle **abscisse de convergence absolue de Laplace** pour  $f$ .

**Remarque 3.5.** Une définition équivalente pour  $\mathcal{L}_a$  est la suivante :

$$\mathcal{L}_a = \{ f \in \mathcal{L}_+, \quad \xi_a(f) < +\infty \}.$$

**Proposition 3.4.** Pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}_+$  l'élément  $\xi_a(f) \in \overline{\mathbb{R}}$  a la propriété suivante :

—  $\forall s \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(s) < \xi_a(f)$  on a  $\int_0^{\infty} |f(t)e^{-st}| dt = +\infty$ .



—  $\forall s \in \mathbb{C}$  avec  $\operatorname{Re}(s) > \xi_a(f)$  on a  $\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt < +\infty$ .

*Démonstration.* La preuve est immédiate de la définition de  $\xi_a(f)$  et du Lemme 3.1.  $\square$

### Exemples :

1. Soit  $f \in \mathcal{L}_+$  une fonction bornée, donc il existe  $M \geq 0$  telle que

$$|f(t)| \leq M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pour tout  $\alpha > 0$  on a

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\alpha t} dt \leq M \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt < +\infty$$

donc  $f \in \mathcal{L}_a$  (remarquons aussi qu'on a  $\xi_a(f) \leq 0$ ).

*Exemple :* la fonction de Heaviside  $H = 1_{[0, +\infty[}$  est un élément de  $\mathcal{L}_a$ , car elle est bornée.

2. Soit  $f \in \mathcal{L}_+$  telle qu'il existe  $M \geq 0$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$|f(t)| \leq M e^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\alpha t} dt \leq M \int_0^\infty e^{(\beta-\alpha)t} dt.$$

Il est facile de voir que si  $\alpha > \beta$  alors

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\alpha t} dt < +\infty,$$

d'où on déduit que  $f \in \mathcal{L}_a$  et on a aussi  $\xi_a(f) \leq \beta$ .

*Exemple :* La fonction  $g(t) = H(t)e^{bt} \quad \forall t \in \mathbb{R}$  avec  $b \in \mathbb{C}$ ,  $b = b_1 + b_2i$ ,  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$  satisfait l'hypothèse demandée avec  $M = 1$  et  $\beta = b_1$ , donc  $g \in \mathcal{L}_a$  avec  $\xi_a(g) \leq b_1$ .

On peut être plus précis concernant  $\xi_a(g)$  : si  $\alpha < b_1$  alors

$$\int_0^\infty |g(t)| e^{-\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{(b_1-\alpha)t} dt = +\infty$$

et ceci nous dit que  $\xi_a(g) = b_1$ .

3. Soit  $f(t) = H(t)e^{-t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-\alpha t} dt = \int_0^\infty \exp(-t^2 - \alpha t) dt.$$

D'autre part il est facile de voir qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$-t^2 - \alpha t \leq -t \quad \forall t \geq M.$$

(car  $-t^2 - \alpha t + t \rightarrow -\infty$  si  $t \rightarrow +\infty$ ). On déduit

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\alpha t} dt = \int_0^M |f(t)|e^{-\alpha t} dt + \int_M^\infty |f(t)|e^{-\alpha t} dt \leq \int_0^M e^{-t^2 - \alpha t} dt + \int_M^\infty e^{-t} dt.$$

Comme  $\int_M^\infty e^{-t} dt < +\infty$  on déduit

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\alpha t} dt < +\infty$$

et ceci pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On déduit alors que  $f \in \mathcal{L}_a$  et on remarque aussi que  $\xi_a(f) = -\infty$ .

4. Soit  $f(t) = H(t)e^{t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\alpha t} dt = \int_0^\infty \exp(t^2 - \alpha t) dt.$$

D'autre part il est facile de voir qu'il existe  $M > 0$  tel que

$$t^2 - \alpha t \geq t \quad \forall t > M.$$

Comme  $\int_M^\infty e^t dt = +\infty$  on déduit

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-\alpha t} dt = +\infty$$

et ceci pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On déduit alors que  $f \notin \mathcal{L}_a$  ce qui s'écrit aussi  $\xi_a(f) = +\infty$ .

**Notation :** Pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}_+$  on définit l'ensemble

$$\Pi_a(f) = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > \xi_a(f)\} \subset \mathbb{C}$$

avec la convention évidente  $\Pi_a(f) = \emptyset$  si  $\xi_a(f) = +\infty$ . Cet ensemble est soit l'ensemble vide, soit tout l'ensemble  $\mathbb{C}$  (si  $\xi_a(f) = -\infty$ ) soit un demi-plan en  $\mathbb{C}$  (si  $\xi_a(f) \in \mathbb{R}$ ). Dans le cas où cet ensemble est non vide il s'appelle **demi-plan de convergence absolue** de  $f$  (même s'il peut être aussi tout le plan  $\mathbb{C}$ ).

**Remarque 3.6.**  $f \in \mathcal{L}_a$  si et seulement si  $\Pi_a(f) \neq \emptyset$ .

**Définition 3.9.** Soit  $f \in \mathcal{L}_a$ . On définit la fonction  $\mathcal{L}(f) : \Pi_a(f) \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$s \in \Pi_a(f) \mapsto \mathcal{L}(f)(s) = I(f, s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

(remarquons que par la définition de  $\Pi_a(f)$  et grâce à la Proposition 3.4, cette dernière intégrale existe).

La fonction  $\mathcal{L}(f)$  s'appelle **transformée de Laplace** de  $f$ . L'application  $f \in \mathcal{L}_a \mapsto \mathcal{L}(f)$  s'appelle **transformation de Laplace** ou **opérateur de Laplace**.

On peut aussi appeler  $f$  fonction **originale** et  $F = \mathcal{L}(f)$  **image de Laplace** de  $f$  et on dit : "l'image de  $f$  est  $F$ " ou "l'original de  $F$  est  $f$ ".

Si  $f \in \mathcal{L}_a$  on dit aussi que  $f$  est **transformable Laplace**.

Notations utilisées :

$$f \sqsupset F \quad \text{ou} \quad f(t) \sqsupset F(s)$$

$$F \sqsubset f \quad \text{ou} \quad F(s) \sqsubset f(t).$$

### Exemples

1. Si  $f$  est la fonction constante 0 alors  $f \in \mathcal{L}_a$  et  $\mathcal{L}(f) = 0$ ; on peut écrire  $\mathcal{L}(0) = 0$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(t) = H(t)e^{bt} \quad \forall t \in \mathbb{R}$  avec  $b \in \mathbb{C}$ . On sait que  $f \in \mathcal{L}_a$  avec  $\xi_a(f) = \text{Re}(b)$  ce qui nous dit que le demi-plan de convergence absolue de  $f$  est donné par  $\Pi_a(f) = \{s \in \mathbb{C}, \text{Re}(s) > \text{Re}(b)\}$ . On a

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} e^{bt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(b-s)t} dt = \frac{1}{b-s} [e^{(b-s)t}]_0^{\infty}.$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(b-s)t} = 0 \quad \text{car} \quad \text{Re}(b-s) < 0$$

on obtient

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-b} \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ avec } \text{Re}(s) > \text{Re}(b).$$

**Cas particulier :  $b = 0$**

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s} \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ avec } \text{Re}(s) > 0.$$

On peut écrire

$$e^{bt}H(t) \sqsupset \frac{1}{s-b} \quad H(t) \sqsupset \frac{1}{s}$$

On a le résultat suivant de linéarité :

**Proposition 3.5.** *L'application  $\mathcal{L}$  est linéaire, c'est à dire : pour tous  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$  et tous  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_a$  on a  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}_a$  avec*

$$\mathcal{L}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \mathcal{L}(f_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(f_2)$$

(égalité valable sur  $\Pi_a(f_1) \cap \Pi_a(f_2)$  qui est aussi un demi-plan en  $\mathbb{C}$  ou tout le plan  $\mathbb{C}$ ).

*Démonstration.* La preuve est très simple, elle utilise la linéarité de l'intégrale (exercice). □

### 3.2.2 Transformée de Laplace et dérivation

Le résultat suivant nous dit comment calculer la transformée de Laplace (TL) de  $f'$  si on connaît la TL de  $f$  :

**Proposition 3.6.** *Soit  $f \in \mathcal{L}_a$  une fonction de classe  $C^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f|_{]0,+\infty[}$  est une fonction continue (rappelons alors que  $f'$  est définie partout sauf éventuellement dans un nombre fini de points, donc elle est définie presque partout). Supposons aussi que  $f' \in \mathcal{L}_a$ . Alors on a l'égalité :*

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+) \quad \forall s \in \Pi_a(f) \cap \Pi_a(f').$$

*Démonstration.* Soit  $s \in \Pi_a(f) \cap \Pi_a(f')$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  assez grand. On peut montrer :

$$\int_0^m f'(t)e^{-st} dt = [f(t)e^{-st}]_0^m - \int_0^m f(t) \frac{d}{dt}(e^{-st}) dt$$

(Cette égalité est évidente en utilisant l'intégration par parties si  $f \in C^1([0, +\infty[)$  ; dans le cas général on la montre en décomposant l'intégrale en plusieurs morceaux, en faisant une intégration par parties sur chaque morceau et en simplifiant). Donc

$$\int_0^m f'(t)e^{-st} dt = f(m)e^{-sm} - f(0+) + s \int_0^m f(t)e^{-st} dt.$$

En passant à la limite  $m \rightarrow +\infty$  (voir Proposition 1.10) on trouve

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+) + \lim_{m \rightarrow +\infty} f(m)e^{-sm}$$

car  $s \in \Pi_a(f) \cap \Pi_a(f')$ . Comme  $\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt < +\infty$  alors  $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(m)e^{-sm} = 0$  (preuve facile, raisonner par absurde) ce qui donne le résultat.  $\square$

**Exemple :**

Soit  $f = H$ . Alors  $f' = 0$ ,  $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}$ ,  $\mathcal{L}(f')(s) = 0$ ,  $f(0+) = 1$  et on a bien

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+) \quad \text{car} \quad 0 = s \frac{1}{s} - 1.$$

On a aussi la généralisation suivant du résultat précédent :

**Proposition 3.7.** *Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in \mathcal{L}_a$  une fonction de classe  $C^m$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^{m-1}$  sur  $]0, +\infty[$ . On suppose aussi que  $f', f'' \dots f^{(m)}$  sont dans  $\mathcal{L}_a$ . Alors on a l'égalité :*

$$\mathcal{L}(f^{(m)})(s) = s^m \mathcal{L}(f)(s) - s^{m-1} f(0+) - s^{m-2} f'(0+) - \dots - s f^{(m-2)}(0+) - f^{(m-1)}(0+)$$

pour tout  $s \in \Pi_a(f) \cap \Pi_a(f') \dots \cap \Pi_a(f^{(m)})$ .

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence (exercice).  $\square$

Par exemple pour  $m = 2$  on a

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2 \mathcal{L}(f)(s) - sf(0+) - f'(0+).$$

**Notation :**

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et  $f \in \mathcal{L}_a$  on note par  $f|_m$  la fonction  $f|_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$f|_m(t) = (-t)^m f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On admet le résultat suivant :

**Proposition 3.8.** *Soit  $f \in \mathcal{L}_a$ . Alors pour tout  $m \in \mathbb{N}$  la fonction  $f|_m$  est dans  $\mathcal{L}_a$  et  $\xi_a(f|_m) = \xi_a(f)$ .*

Le résultat suivant nous donne une manière de calculer la TL de  $f|_m$  si on connaît la TL de  $f$  :

**Proposition 3.9.** *Soit  $f \in \mathcal{L}_a$ . Alors sa transformée de Laplace  $F = \mathcal{L}(f)$  est une fonction dérivable à tout ordre dans le demi-plan complexe  $\Pi_a(f)$ . En plus on a*

$$F^{(m)}(s) = \mathcal{L}(f|_m)(s) \quad \forall s \in \Pi_a(f), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

*Idee de la preuve :* Pour  $m = 1$  on a le calcul formel suivant :

$$\frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) \frac{d}{ds}(e^{-st}) dt = \int_0^\infty f(t)(-t)e^{-st} dt = \int_0^\infty f|_1(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}(f|_1)(s)$$

et ensuite procéder par récurrence.

### 3.2.3 Transformée de Laplace et convolution

**Définition 3.10.** *Soient  $f, g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ . On appelle **convolution** de  $f$  et  $g$  (quand elle existe) une nouvelle fonction notée  $f * g$  avec  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Exemples :**

1. Si l'une des 2 fonctions  $f$  ou  $g$  est la fonction constante 0 alors la convolution existe et est égale à 0 ; donc

$$f * 0 = 0 * f = 0, \quad \forall f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}).$$

2. Si  $f$  est la fonction constante 1 et  $g = 1_{[a,b]}$  ( $g$  est la fonction indicatrice de l'intervalle  $[a, b]$ ) avec  $a, b \in \mathbb{R}$   $a < b$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[a,b]}(t) dt = \int_a^b 1 dt = b - a.$$

Donc la convolution  $f * g$  existe et elle est la fonction constante  $b - a$ .

3. Si  $f = g = 1$  (fonctions constantes), alors  $f * g$  n'existe pas car  $\int_{\mathbb{R}} 1 = +\infty$ .

On a le résultat suivant :

**Proposition 3.10.** 1. Si  $f * g$  existe alors  $g * f$  existe aussi et on a

$$f * g = g * f \quad (\text{commutativité})$$

2. Si  $f, g \in \mathcal{L}_+$  alors  $f * g$  existe et appartient à  $\mathcal{L}_+$ . En plus on a

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) dt \quad \forall x > 0.$$

3. Si  $f, g \in \mathcal{L}_a$  alors  $f * g \in \mathcal{L}_a$  avec en plus

$$\xi_a(f * g) \leq \max \{ \xi_a(f), \xi_a(g) \}$$

et

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s) \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \operatorname{Re}(s) > \max \{ \xi_a(f), \xi_a(g) \}.$$

*Démonstration.* 1. En faisant le changement des variables  $y = x - t$  (à  $x$  fixé) on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy$$

ce qui veut dire :  $f * g = g * f$ .

2. On a deux cas :

**Cas 1 :**  $x \leq 0$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^x f(x-t)g(t) dt + \int_x^{\infty} f(x-t)g(t) dt = 0 + 0 = 0$$

car  $g(t) = 0$  si  $t \leq x$  et  $f(x-t) = 0$  si  $t > x$ .

**Cas 2 :**  $x > 0$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(x-t)g(t) dt + \int_0^x f(x-t)g(t) dt + \int_x^{\infty} f(x-t)g(t) dt$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt = \int_0^x f(x-t)g(t) dt$$

si cette dernière intégrale existe.

Soit  $A > 0$  fixé arbitraire et notons par  $\Delta_A$  le triangle suivant de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\Delta_A = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq t \leq x \leq A \}.$$

Montrons d'abord qu'on a

$$\int_{\Delta_A} |f(x-t)g(t)| dt dx < +\infty \quad (3.2)$$

Par le Théorème de Fubini, en inversant l'ordre d'intégration, il suffit de montrer qu'on a

$$\int_0^A \int_t^A |f(x-t)g(t)| dx dt < +\infty$$

En faisant le changement des variable  $y = x - t$  (à  $t$  fixé) on obtient :

$$\int_0^A \int_t^A |f(x-t)g(t)| dx dt = \int_0^A \int_0^{A-t} |f(y)| \cdot |g(t)| dy dt \leq \int_0^A \int_0^A |f(y)| \cdot |g(t)| dy dt.$$

Ceci nous donne

$$\int_0^A \int_t^A |f(x-t)g(t)| dx dt \leq \int_0^A |f(y)| dy \int_0^A |g(t)| dt < +\infty$$

car  $f, g \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$  (l'intervalle  $[0, A]$  étant un compact dans  $[0, +\infty[$ ).

Nous avons donc montré (3.2) pour tout  $A > 0$ . En utilisant encore le Théorème de Fubini nous déduisons que pour tout  $A > 0$  la fonction

$$x \mapsto \int_0^x f(x-t)g(t) dt \in \mathbb{C} \quad (3.3)$$

est bien définie pour presque tout  $x \in [0, A]$  et intégrable Lebesgue sur  $[0, A]$ . Comme  $A$  est arbitraire, ceci implique d'abord que cette fonction est bien définie pour presque tout  $x \geq 0$ .

(Pour montrer cette affirmation on écrit  $[0, +\infty[$  comme l'union dénombrable des intervalles de la forme  $[k, k+1[$  avec  $k \in \mathbb{N}$ ; comme la mesure de Lebesgue des  $x \in [k, k+1[$  tels que la fonction (3.3) n'est pas définie est égale à 0 alors la mesure de Lebesgue des  $x \in [0, +\infty[$  pour lesquels la même fonction n'est pas définie est encore égale à 0 (car  $\sum_{k \in \mathbb{N}} 0 = 0$ ). Ceci montre que la fonction (3.3) est définie presque partout sur  $[0, +\infty[$ ).

D'autre part on vient de montrer que cette fonction est localement intégrable sur  $[0, +\infty[$  ce qui finit la preuve de cette partie.

### 3. (Preuve formelle)

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^\infty e^{-sx} (f * g)(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x f(x-t)g(t) dt dx$$

On utilisant le Théorème de Fubini on trouve

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_{\Delta_\infty} e^{-sx} f(x-t)g(t) dt dx$$

où  $\Delta_\infty$  est le “triangle infini” suivant en  $\mathbb{R}^2$  :

$$\Delta_\infty = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq t \leq x\}.$$

En échangeant l’ordre d’intégration on trouve

$$\int_{\Delta_\infty} e^{-sx} f(x-t)g(t) dt dx = \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-sx} f(x-t)g(t) dx dt.$$

En faisant le changement d’inconnue  $x-t=y$  (à  $t$  fixé) on déduit

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} e^{-sy} f(y)g(t) dy dt = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dy \int_0^\infty e^{-sy} f(y) dt$$

donc

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \mathcal{L}(g)(s).$$

□

### 3.2.4 Formule d’inversion, unicité et applications

La proposition suivante nous donne une “formule d’inversion” qui permet de calculer une fonction  $f$  en connaissant sa transformée de Laplace.

**Proposition 3.11.** *Soit  $f \in \mathcal{L}_a$  et supposons que  $f$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $F : \Pi_a(f) \rightarrow \mathbb{C}$  la transformée de Laplace de  $f$ . Alors pour tout  $d > \xi_a(f)$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a :*

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A F(d+xi) e^{t(d+xi)} dx = \pi i [f(t+) + f(t-)].$$

*Démonstration.* Résultat admis !

□

**Remarque :** On observe que la limite qui apparait dans la partie de gauche de la formule précédente est indépendante du réel  $d$ .

On a la conséquence immédiate suivante :

**Corollaire 3.1.** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, si  $t \in \mathbb{R}$  est tel que  $f$  est continue en  $t$  alors*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A F(d+xi) e^{t(d+xi)} dx.$$

(cette formule s’appelle **la formule de Bromwich-Mellin**).

**Corollaire 3.2.** *Si  $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_a$  sont deux fonctions continues par morceaux qui ont la même transformée de Laplace, c’est à dire*

$$\mathcal{L}(f_1)(s) = \mathcal{L}(f_2)(s) \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(s) > \max \{ \xi_a(f_1), \xi_a(f_2) \}$$

alors

$$f_1(t) = f_2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus (D_1 \cup D_2)$$

où  $D_j \in \mathbb{R}$  est l’ensemble (fini, éventuellement vide) des points de discontinuité de  $f_j$ ,  $j = 1, 2$ . On a aussi (c’est évident !)  $\xi_a(f_1) = \xi_a(f_2)$ .



**Remarque 3.7.** On déduit le résultat suivant : si  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction donnée (où  $D \subset \mathbb{C}$  est un demiplan à droite dans le plan complexe, donc  $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > b\}$  avec  $b \in \mathbb{R}$ ) et si  $f \in \mathcal{L}_a$  avec  $f$  continue par morceaux est tel que  $\mathcal{L}(f) = F$  sur  $D \cap \Pi_a(f)$  alors  $f$  est unique avec cette propriété (si on confond deux fonctions égales presque partout). On dira alors que  $f$  est la **transformée de Laplace inverse** de  $F$  et on notera

$$f = \mathcal{L}^{-1}(F).$$

**Remarque 3.8.** En général il est très difficile de calculer  $f$  en fonction de  $F$  en utilisant la formule de Bromwich-Mellin. Dans ce cours on va calculer l'inverse d'une fonction  $F$  en utilisant les propriétés de la transformée de Laplace et quelques transformées de Laplace connues (on dira qu'on utilise un "tableau des transformées de Laplace").

**Exemple :** Soit  $F : \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par

$$s \mapsto F(s) = \frac{3}{s} - \frac{2}{s-1}.$$

On sait que

$$\mathcal{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s} \quad \forall s \in \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 0\}$$

et

$$\mathcal{L}(H(t)e^t)(s) = \frac{1}{s-1} \quad \forall s \in \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1\}.$$

Par linéarité ceci nous donne

$$\mathcal{L}(3H(t) - 2H(t)e^t)(s) = \frac{3}{s} - \frac{2}{s-1} = F(s) \quad \forall s \in \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1\}.$$

Nous avons alors

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = f$$

avec  $f \in \mathcal{L}_a$  la fonction donnée par

$$t \in \mathbb{R} \mapsto f(t) = 3H(t) - 2H(t)e^t.$$

**Applications importantes : résolution des certaines équations différentielles ou intégral-différentielles - voir plusieurs exercices en TD.**

### 3.2.5 La transformée de Fourier comme cas particulier de la transformée de Laplace

Nous commençons par la remarque importante suivante : dans cette section nous avons défini la transformée de Laplace uniquement pour des fonctions  $f$  causales. L'avantage de cette restriction est que la transformée de Laplace est définie sur un demi-plan dans le

plan complexe.

On pourrait définir la transformée de Laplace pour des fonctions qui ne sont pas causales, mais dans ce cas la transformée de Laplace (donnée par la même formule :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-st} dt$$

ne sera plus définie pour  $s$  dans un demi-plan, mais pour  $s$  dans une **bande verticale** dans le plan complexe (c'est à dire un ensemble de la forme  $\{s \in \mathbb{C}, a < \operatorname{Re}(s) < b\}$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ).

En fait si  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  et s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|e^{-\alpha t} dt < +\infty$  (mais sans avoir aussi la condition  $f = 0$  p.p. si  $t < 0$ ) on pose

$$a = \inf\{\beta \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} |f(t)|e^{-\beta t} dt < +\infty\}$$

et

$$b = \sup\{\beta \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} |f(t)|e^{-\beta t} dt < +\infty\}.$$

Clairement  $a \leq \alpha \leq b$ .

On appelle cette transformée **la transformée de Laplace bilatérale**; pour éviter toute confusion, on appelle parfois la transformée de Laplace habituelle (celle définie dans ce chapitre pour des fonctions causales) **la transformée de Laplace monolatérale**.

Nous avons la définition suivante :

**Définition 3.11.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . On définit alors la **transformée de Fourier** de  $f$  notée  $\mathcal{F}(f)$  comme la fonction  $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  donnée par

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} dt, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

**Remarque 3.9.** 1. L'hypothèse  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  nous garantit que  $\mathcal{F}(f)$  est bien définie pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  car  $|f(t)e^{-it\xi}| = |f(t)|$  pour tous  $t \in \mathbb{R}$ , donc

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)e^{-it\xi}| = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty.$$

2. On peut écrire

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{L}(f)(i\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

mais il faut voir  $\mathcal{L}$  comme un transformée de Laplace bilatérale, car  $f$  n'est pas nécessairement causale; il faut aussi que l'axe imaginaire dans le plan complexe (c'est à dire : l'ensemble  $\{\xi i, \xi \in \mathbb{R}\}$ ) soit incluse dans la bande verticale de définition de la transformée de Laplace bilatérale de  $f$ .

Dans le cas particulier où  $f$  est dans  $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  avec en plus  $f$  causale, on a bien

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{L}(f)(i\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

où la transformée de Laplace est vue ici comme une transformée de Laplace habituelle (donc monolatérale).

3. On peut aussi voir la transformée de Laplace comme une transformée de Fourier :  
si  $s = s_1 + is_2$  avec  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  et si  $f \in \mathcal{L}_a$  alors on a formellement

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-s_1 t} e^{-is_2 t} dt = \mathcal{F}(f(t)e^{-s_1 t})(s_2)$$

c'est à dire :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{F}(f(t)e^{-t\operatorname{Re}(s)})(\operatorname{Im}(s)).$$

**A savoir :** - Il existe d'autres transformations "fonctionnelles" : transformée de Hilbert, de Hankel, de Mellin, etc ...

# Chapitre 4

## La théorie des distributions.

### 4.1 Introduction

Une distribution est une sorte de “fonction généralisée” et elle est introduite pour modéliser des phénomènes où les fonctions habituelles ne sont pas très pratiques à utiliser. Commençons par l'exemple suivant : supposons qu'on a un signal physique d'une très grande intensité sur une région très petite dans l'espace (par exemple une charge électrique très concentrée dans un petit voisinage d'un point, et nulle ailleurs ; c'est ce que les physiciens appellent une *charge ponctuelle*). Supposons que la quantité totale de charge est connue, égale par exemple à 1. Nous pouvons considérer une densité de charge (pour simplifier on suppose que la charge est en dimension 1 et qu'elle est concentrée autour du point 0) qui sera une fonction  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\rho(x) = \begin{cases} \text{”grande”} & \text{si } x \in \text{”petit intervalle autour de 0”} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

mais de tel sorte que  $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$ .

On peut donner comme exemple d'une telle densité la fonction

$$\rho_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.1)$$

avec  $n$  un nombre très grand, qui peut être en général assez mal connu (difficile de savoir dans un cas donné si on a  $n = 1000$  ou  $n = 2000$ , etc.).

On aimerait avoir une limite, pour  $n \rightarrow +\infty$  d'une telle fonction.

Le physicien P. Dirac a introduit et utilisé une fonction  $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  qui est vue comme un sorte de “limite” pour  $n \rightarrow +\infty$  de la fonction définie en (4.1). La fonction  $\delta$  (appelée aussi la *fonction de Dirac*) est telle que

1.  $\delta(0) = +\infty$
2.  $\delta(x) = 0, \quad \forall x \neq 0$

$$3. \int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 1.$$

L'existence d'une telle fonction contredit la théorie de la l'intégration au sens de Lebesgue, car de 2. on déduit  $\delta = 0$  p.p.  $x \in \mathbb{R}$  ce qui implique  $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) dx = 0$  ce qui est en contradiction avec 3.

On introduira une limite de la fonction  $\rho_n$  définie en (4.1) qui sortira du cadre des fonctions ; ça sera une *distribution*.

### Un exemple dans l'électrostatique.

Supposons qu'on a une charge électrique qui occupe un volume  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et qui est donnée par une densité de charge  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dans la réalité une telle fonction est assez mal connue (on ne peut disposer que des approximations) car aucun appareil de mesure ne peut nous donner la valeur de  $\rho$  dans un point  $x$  de  $\Omega$  ; un appareil ne peut mesurer que l'effet produit sur lui par les charges situés dans un voisinage de ce point. En plus il y a une infinité des points  $x \in \Omega$ .

En fait l'experimentateur accède indirectement à la densité de charge  $\rho(x)$  par ses propriétés, c'est à dire, en mesurant non pas  $\rho(x)$  mais des quantités physiques importantes, faisant intervenir  $\rho$ , comme par exemple :

1. La charge totale

$$Q = \int_{\Omega} \rho(x) dx$$

2. La charge dans un sous-domaine  $\omega$  de  $\Omega$

$$Q_{\omega} = \int_{\omega} \rho(x) dx$$

(donc on peut noter  $Q = Q_{\Omega}$ )

3. Le potentiel dans un point  $a \in \mathbb{R}^3$  :

$$V_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(x)}{\|x - a\|} dx$$

avec  $\epsilon_0$  une constante physique, où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne d'un vecteur.

Ce sont en fait des quantités du type

$$\int_{\Omega} \rho(x) \varphi(x) dx \tag{4.2}$$

avec  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  données par exemple par

$\varphi \equiv 1$  pour  $Q$

$\varphi = 1_{\omega}$  pour  $Q_{\omega}$

$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|x-a\|}$  pour  $V_a$ .

On pourrait considérer de manière théorique toutes les intégrales du type (4.2) pour "toute" fonction  $\varphi$ . Il est alors naturel d'introduire une application

$$T_\rho : \text{"un ensemble des fonctions test"} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T_\rho(\varphi) = \int_{\Omega} \rho(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi$$

Théoriquement, si on connaît toutes les intégrales du type (4.2) pour tous  $\varphi$  alors on "aurait suffisamment d'information" pour caractériser  $\rho$ , donc  $T_\rho$  est une autre manière de se donner  $\rho$ ; ceci à condition d'avoir :

$$\rho_1 \neq \rho_2 \implies T_{\rho_1} \neq T_{\rho_2}$$

(on va détailler ceci ultérieurement).

Dans la suite on introduira de manière rigoureuse des applications plus générales que  $T_\rho$ .

## 4.2 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions test

Dans tout ce chapitre  $\Omega$  désigne un ouvert non-vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 4.1.** On note par  $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{K})$  ou encore par  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$  l'ensemble des fonctions  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  appartenant à  $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$  qui ont la propriété suivante : il existe un compact  $K$  inclus dans  $\Omega$ , tel que  $\varphi$  s'annule sur  $\Omega \setminus K$  (donc  $\varphi(x) = 0, \forall x \in \Omega \setminus K$ ).

**Remarque 4.1.** 1. Dans la littérature sur le sujet il y a une autre définition de  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$ , utilisant utilise la notion de **support** d'une fonction : le support c'est l'adhérence de l'ensemble où la fonction ne s'annule pas ; alors une fonction est dans  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$  si elle est dans  $C^\infty(\Omega, \mathbb{K})$  et son support est compact et inclus dans  $\Omega$ .

2. La propriété de l'existence d'un compact  $K$  inclus dans  $\Omega$  en dehors duquel  $\varphi$  s'annule est non vérifiée dans le cas où il existe une suite  $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$  qui tend vers un élément de  $\partial\Omega$  ou dont le norme tends vers  $+\infty$ , tel que  $\varphi(x^{(k)}) \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ . C'est le cas par exemple si  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ .

3. Si  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  est un autre ouvert avec  $\Omega_1 \subset \Omega$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K})$  alors on dira par abus de langage que  $\varphi$  appartient (respectivement n'appartient pas) à  $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K})$  si la restriction de  $\varphi$  à  $\Omega_1$  appartient ( respectivement n'appartient pas) à  $\mathcal{D}(\Omega_1, \mathbb{K})$ .

Dans ce cours nous allons considérer  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . C'est pourquoi on utilisera les notations :  $C_0^\infty(\Omega) = C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$ .

**Quelques exemples :**

**Exemple 1.**

La fonction constante 0 est toujours un élément de  $\mathcal{D}(\Omega)$ , car elle est dans  $C^\infty$  et s'annule en dehors d'un compact dans  $\Omega$ , qui pourrait être par exemple un singleton quelconque  $\{x\}$  avec  $x \in \Omega$ .

**Exemple 2.**

Une fonction constante quelconque non nulle est dans  $C^\infty(\Omega)$  mais elle n'est pas dans  $\mathcal{D}(\Omega)$  car elle ne s'annule jamais.

**Exemple 3.**

Soit  $\Omega = \mathbb{R}$  et  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction qui vaut 0 sur  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$  et qui vaut  $1 - x^2$  si  $x \in [-1, 1]$ . Si on prends  $K = [-1, 1]$  alors  $K$  est un compact et  $\varphi$  s'annule bien en dehors de  $K$ . Mais la fonction n'est pas dans  $C^\infty(\Omega)$ , donc elle n'est pas dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Exemple 4 (fondamental)**

On considère  $n = 1$  et  $\Omega = \mathbb{R}$ . On introduit la fonction  $\theta_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\theta_1(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

**Proposition 4.1.** *La fonction  $\theta_1$  est un élément de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Il est évident que  $\theta_1$  s'annule en dehors d'un compact inclus dans  $\mathbb{R}$ , qui est l'intervalle  $[-1, 1]$ . Il reste à montrer que  $\theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

Il est évident que  $\theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$ . Pour montrer que  $\theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$  il suffit de montrer que  $\theta_1$  ainsi que chacune de ses dérivées (définies sur  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ) se prolongent par continuité en  $x = 1$  et en  $x = -1$ ; par symétrie il suffit de le faire pour  $x = 1$  seulement.

Il est évident que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a

$$\theta_1^{(k)}(x) = 0, \quad \forall x > 1$$

ce qui donne

$$\lim_{x \rightarrow 1, x > 1} \theta_1^{(k)}(x) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Alors pour montrer le résultat attendu il faut et il suffit de montrer

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \theta_1^{(k)}(x) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Il est très facile de voir qu'on a

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} \theta_1(x) = \theta_1(1) = 0.$$

ce qui donne (4.4) pour  $k = 0$  ainsi que la continuité de  $\theta_1$ . La dérivée de  $\theta_1$  est donnée par

$$\theta_1'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(1-x^2)^2} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

et on peut montrer par récurrence sur  $k$  que la dérivée à l'ordre  $k$  de  $\theta_1$  est une expression du type

$$\theta_1^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$$

où  $P_k$  est un polynome.

Nous faisons le changement des variables

$$y = \frac{1}{1-x^2} \rightarrow +\infty, \quad \text{si } x \rightarrow 1, x < 1$$

et nous avons

$$\frac{1}{(1-x^2)^{2k}} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{y^{2k}}{e^y} \rightarrow 0 \quad \text{pour } y \rightarrow +\infty$$

ce qui nous donne le résultat attendu. □

**Remarque 4.2.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et non-vide.

Si  $\inf(I) < -1$  et  $\sup(I) > 1$  alors  $\theta_1 \in \mathcal{D}(I)$ . Il en est de même si  $\sup(I) < -1$  ou si  $\inf(I) > 1$ , car dans ces deux cas la restriction de  $\theta_1$  à  $I$  est égale à 0.

Dans tous les autres cas on a  $\theta_1 \notin \mathcal{D}(I)$ .

Par exemple on a  $\theta_1 \in \mathcal{D}(] - 2, 3])$  mais  $\theta_1 \notin \mathcal{D}(]0, 3])$ .

L'exemple suivant montre comment construire un élément de  $\mathcal{D}(I)$  pour un intervalle  $I$  général.

**Exemple 5.**

Soit  $I$  un intervalle ouvert en  $\mathbb{R}$  et  $a \in I$ . Comme  $I$  est ouvert il existe  $\epsilon > 0$  assez petit tel que  $[a - \epsilon, a + \epsilon] \subset I$ . Considérons la fonction  $\psi_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\psi_1(x) = \theta_1\left(\frac{x-a}{\epsilon}\right) \quad \forall x \in I.$$

Nous avons :

$$\psi_1(x) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x-a}{\epsilon}\right| \geq 1 \Leftrightarrow |x-a| \geq \epsilon \Leftrightarrow x \in I \setminus [a - \epsilon, a + \epsilon]$$

ce qui nous dit que l'intervalle  $[a - \epsilon, a + \epsilon]$  est un compact inclus dans  $I$  en dehors duquel  $\psi_1$  s'annule. D'autre part,  $\psi_1 \in C^\infty(I)$  car  $\psi_1$  est la composée entre deux fonctions qui sont dans  $C^\infty$  : la fonction  $\theta_1$  et la fonction qui à  $x \in I$  associe  $\frac{x-a}{\epsilon}$ . Donc  $\psi_1 \in \mathcal{D}(I)$ .

**Exemple 6.**

Cet exemple est une généralisation de l'exemple précédent.

Soit  $\Omega$  ouvert en  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in \Omega$ . Comme  $\Omega$  est ouvert, il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\overline{B(a, \epsilon)} \subset \Omega$ . On considère alors la fonction  $\psi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\psi_n(x) = \theta_1\left(\frac{\|x-a\|^2}{\epsilon^2}\right) \quad \forall x \in \Omega.$$

Observons que pour  $\epsilon$  assez petit nous avons :

$$\psi_n(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\|x-a\|^2}{\epsilon^2} \geq 1 \Leftrightarrow \|x-a\| \geq \epsilon \Leftrightarrow x \in \Omega \setminus \overline{B(a, \epsilon)}$$



donc  $\overline{B(a, \epsilon)}$  est un compact dans  $\Omega$  en dehors duquel  $\psi_n$  s'annule.

D'autre part,  $\psi_n \in C^\infty(\Omega)$  car  $\psi_n$  est la composée entre deux fonctions qui sont dans  $C^\infty$  : la fonction  $\theta_1$  et la fonction qui à  $x \in \Omega$  associe  $\frac{\|x-a\|^2}{\epsilon^2}$ . Ceci nous donne finalement  $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

**Conséquence :** L'ensemble  $\mathcal{D}(\Omega)$  ne se réduit pas à l'élément 0.

**Proposition 4.2.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Si  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$  et  $g \in C^\infty(\Omega)$  alors  $fg \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

*Démonstration.* Il est évident que  $fg \in C^\infty(\Omega)$  comme produit de deux fonctions dans  $C^\infty(\Omega)$ .

D'autre part, par hypothèse, il existe un compact  $K$  tel que  $f = 0$  sur  $\Omega \setminus K$ . Alors on a aussi  $fg = 0$  sur  $\Omega \setminus K$  ce qui montre le résultat.  $\square$

Cette proposition donne une manière de construire "beaucoup" des éléments de  $\mathcal{D}(\Omega)$  à partir d'un seul ; par exemple :  $x\theta_1(x)$ ,  $\sin(x)\theta_1(x)$  etc.. sont des fonctions dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

**Proposition 4.3.** Toute combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{D}(\Omega)$  est encore un élément de  $\mathcal{D}(\Omega)$  (c'est à dire :  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$  on a  $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$  ).

*Démonstration.* Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$  et  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

1. Il est très facile de voir que  $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \in C^\infty(\Omega)$ .
2. Par hypothèse, il existe deux compacts  $K_1 \subset \Omega$  et  $K_2 \subset \Omega$  tels que  $\varphi_j = 0$  sur  $\Omega \setminus K_j$ ,  $j = 1, 2$ . Considérons  $K = K_1 \cup K_2$ . On voit facilement que l'ensemble  $K$  est aussi un compact inclus dans  $\Omega$  et que  $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$  s'annule sur  $\Omega \setminus K$ . Ceci finit la preuve.

$\square$

Cette proposition nous dit en fait que  $\mathcal{D}(\Omega)$  est un **espace vectoriel réel**, qu'il faut voir comme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel (noté par  $\mathcal{F}(\Omega)$ ) des fonctions définies sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec les opérations addition " + " et multiplication par des scalaires "  $\cdot$  " habituelles :

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega), \forall x \in \Omega$$

$$(\lambda \cdot \varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall x \in \Omega.$$

Nous finissons cette section par la proposition utile suivante :

**Proposition 4.4.** Pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  et tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  la fonction  $D^\alpha\varphi$  est bornée sur  $\Omega$  (donc  $\varphi$  aussi est bornée sur  $\Omega$ ).

*Démonstration.* Il existe un ensemble compact  $K \subset \Omega$  tel que  $\varphi = 0$  sur l'ensemble ouvert  $\Omega \setminus K$ , ce qui nous dit  $D^\alpha\varphi = 0$  sur  $\Omega \setminus K$ . Comme  $D^\alpha$  est continue sur  $K$  alors elle est bornée sur  $K$  grâce au théorème de Weierstrass. On déduit alors facilement que  $D^\alpha\varphi$  est bornée sur  $\Omega$ .  $\square$

### 4.3 La notion de distribution

**Définition 4.2.** On appelle **distribution sur  $\Omega$**  une application **linéaire** de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ , c'est à dire, une application  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant la condition :

$$T(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2) = \beta_1T(\varphi_1) + \beta_2T(\varphi_2), \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$$

**Remarque 4.3.** 1. Dans ce cours on donne une définition simplifiée de la notion de distribution. En fait il y a une hypothèse supplémentaire qui traduit une certaine "continuité" de  $T$ , hypothèse qui ne sera pas donnée ici.

2. On pourrait considérer  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$  à la place de  $\mathcal{D}(\Omega)$  et définir, pour plus de généralité, une distribution comme un application linéaire de  $\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{C})$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ; mais dans ce cours on travaillera toujours en  $\mathbb{R}$ .

**Notation :** On notera dans la suite par  $\mathcal{D}'(\Omega)$  l'ensemble de toutes les distributions sur  $\Omega$ . On dit aussi que  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est le **dual** de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

**Notation :** On utilisera dans la suite la notation plus commode

$\langle T, \varphi \rangle$  ou  $\langle T, \varphi \rangle$  (crochet de dualité) au lieu de  $T(\varphi)$ , pour toute distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et tout élément  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  (on appellera  $\varphi$  *fonction test* pour la distribution  $T$ ).

Nous donnerons pour l'instant deux exemple fondamentaux des distributions.

Le résultat suivant introduit les distributions du type Dirac.

**Définition 4.3.** Soit  $a \in \Omega$  et considérons l'application  $\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Alors  $\delta_a$  est une distribution sur  $\Omega$  appelée **distribution de Dirac en  $a$  sur  $\Omega$** .

*Preuve du fait que  $\delta_a$  est une distribution :* Il faut montrer la linéarité de l'application  $\delta_a$  : soient  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$  arbitraires. On a

$$\langle \delta_a, \beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 \rangle = (\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2)(a) = \beta_1\varphi_1(a) + \beta_2\varphi_2(a) = \beta_1 \langle \delta_a, \varphi_1 \rangle + \beta_2 \langle \delta_a, \varphi_2 \rangle$$

ce qui finit la preuve.

**Notation :** Si  $0 \in \Omega$  on notera  $\delta_0$  par  $\delta$ ; cette distribution s'appelle simplement **distribution de Dirac sur  $\Omega$** .

Le deuxième exemple fondamental des distributions est le suivant :

**Définition 4.4.** Pour toute fonction  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  on définit une distribution  $T_u$  de la manière suivante :

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La distribution  $T_u$  s'appelle **distribution régulière associée à  $u$** .

*Preuve du fait que  $T_u$  est une distribution :* Soit  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  fixé.

1. Il faut d'abord montrer que pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  la fonction  $x \in \Omega \mapsto u(x)\varphi(x) \in \mathbb{R}$  est intégrable Lebesgue.

Par hypothèse il existe un compact  $K$  inclus dans  $\Omega$  tel que  $\varphi = 0$  (donc  $u\varphi = 0$ ) sur  $\Omega \setminus K$ . Il suffit alors de montrer que  $u\varphi$  est intégrable Lebesgue sur  $K$ .

Nous avons la majoration :

$$|u(x)\varphi(x)| \leq \left[ \sup_{y \in K} |\varphi(y)| \right] |u(x)|, \quad \forall x \in K.$$

Comme  $\sup_{y \in K} |\varphi(y)| < +\infty$  et  $u$  est intégrable Lebesgue sur  $K$  alors  $u\varphi$  est intégrable Lebesgue sur  $K$ , ce qui donne le résultat.

2. On montre facilement que  $T_u$  est linéaire ; ceci résulte de la linéarité de l'intégrale (*Exercice*).

**Définition 4.5.** On dit qu'une distribution est **singulière** si elle n'est pas régulière.

On a l'analogie suivant de la Proposition 4.3 :

**Proposition 4.5.** Toute combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est encore un élément de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (c'est à dire :  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$  on a  $aT + bS \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ).

*Démonstration.* Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Montrons que  $aT + bS$  est linéaire comme application de  $\mathcal{D}(\Omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ; on considère pour cela deux constantes  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  et deux fonction test  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \langle aT + bS, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle &= a \langle T, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle + b \langle S, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \\ &= a(\alpha_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T, \varphi_2 \rangle) + b(\alpha_1 \langle S, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle S, \varphi_2 \rangle) \end{aligned}$$

(on a utilisé la linéarité de chacune des applications  $T$  et  $S$ ). En regroupant les termes avec  $\alpha_1$  entre eux et pareil avec  $\alpha_2$  on obtient

$$\langle aT + bS, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle aT + bS, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle aT + bS, \varphi_2 \rangle$$

ce qui finit la preuve. □

**Remarque 4.4.** Il existe la "distribution 0" ; c'est  $\langle 0, \varphi \rangle = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ .

En plus on peut voir cette distribution 0 comme la distribution régulière associée à la fonction constante 0.

Nous déduisons que  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est un espace vectoriel réel, qu'il faut voir comme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de  $\mathcal{D}(\Omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec les opérations addition " + " et multiplication par des scalaires " · " habituelles :

$$\begin{aligned} \langle T + S, \varphi \rangle &= \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall T, S \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \langle \lambda \cdot T, \varphi \rangle &= \lambda \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

*Exemples :*

Nous avons le résultat suivant :

**Lemme 4.1.** 1. Toute distribution de Dirac sur  $\Omega$  est une distribution singulière.

2. Plus généralement, toute combinaison linéaire avec des coefficients pas tous nuls des distributions de Dirac qui correspondent à des points deux à deux distinctes est une distribution singulière.

*Démonstration.* 1. Soit  $a \in \Omega$  fixé arbitraire et considérons la distribution de Dirac  $\delta_a$  en  $a$ ; on se propose de montrer que  $\delta_a$  n'est pas une distribution régulière. Supposons par absurd qu'elle est régulière, donc il existe  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  tel que  $\delta_a = T_u$ , c'est à dire

$$\varphi(a) = \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.6)$$

Nous considérons encore l'élément de  $\mathcal{D}(\Omega)$  construit à l'Exemple 6 de la Section précédente, mais avec  $\epsilon = \frac{1}{p}$  où  $p \in \mathbb{N}^*$  est grande. On a alors une suite des fonctions test que nous notons  $\{\varphi_p\}_{p \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  définies par

$$\varphi_p(x) = \theta_1(p^2 \|x - a\|^2), \quad \forall x \in \Omega$$

On peut considérer  $p_0 \in \mathbb{N}^*$  assez grand, tel que  $\overline{B(a, \frac{1}{p_0})} \subset \Omega$  et prendre  $p \geq p_0$ . Maintenant dans l'égalité (4.6) on prend  $\varphi = \varphi_p$  et on passe à la limite  $p \rightarrow +\infty$ . On observe que

$$\varphi_p(a) = \theta_1(0) = \frac{1}{e}.$$

Montrons que la limite de la partie de droite de (4.6) est égale à 0, ce qui va nous donner une contradiction et va montrer le résultat. Notons  $K = \overline{B(a, \frac{1}{p_0})}$  qui est un ensemble compact et inclus dans  $\Omega$  et observons que pour tout  $p \geq p_0$  la fonction  $\varphi_p$  s'annule sur  $\Omega \setminus K$ . Nous avons alors

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi_p(x) dx = \int_K u(x) \varphi_p(x) dx, \quad \forall p \geq p_0.$$

Nous avons :

— Pour tout  $x \in K$  avec  $x \neq a$  on a  $\varphi_p(x) \rightarrow 0$  si  $p \rightarrow +\infty$  (car  $\varphi_p(x) = 0$  si  $p$  est assez grand), donc

$$\varphi_p(x) \rightarrow 0, \quad p.p. x \in K$$

— Comme  $|\theta_1| \leq \frac{1}{e}$  alors  $|\varphi_p| \leq \frac{1}{e}$  donc

$$|u(x)\varphi_p(x)| \leq \frac{1}{e}|u(x)|, \quad \forall x \in K.$$

Comme  $|u|$  est intégrable sur  $K$  alors les hypothèses du théorème de convergence dominée de Lebesgue sur  $K$  sont satisfaites ce qui donne

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_K u(x) \varphi_p(x) dx = 0$$

et finit la preuve.

2. Soient  $k \in \mathbb{N}^*$ , les points  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \Omega$  distinctes deux à deux, des coefficients  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  pas tous nuls et considérons la distribution  $T = \alpha_1 \delta_{a_1} + \alpha_2 \delta_{a_2} + \dots + \alpha_k \delta_{a_k}$ . On va encore montrer par absurd que  $T$  est singulière. En échangeant éventuellement l'ordre des indices, on peut supposer que  $\alpha_1 \neq 0$ . On applique encore l'argument de la partie 1) avec  $a_1$  à la place de  $a$ ; il suffit d'observer que pour  $p \in \mathbb{N}$  suffisamment grand on a

$$\langle T, \varphi_p \rangle = \alpha_1 \varphi_p(a_1) = \frac{\alpha_1}{e} \neq 0.$$

Le reste de la preuve est comme dans la partie 1. □

Dans la suite de cette section on va voir que toute fonction localement intégrable peut être vue comme une distribution. On commence par le lemme fondamental suivant :

**Lemme 4.2.** *Si  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  est tel que*

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

*alors  $u = 0$  p.p.*

*Preuve dans le cas particulier  $u$  continue :*

On va montrer par absurd que  $u$  est la fonction constante 0; supposons que c'est faux, donc il existe  $a \in \Omega$  tel que  $u(a) \neq 0$ . Pour fixer les idées supposons que  $u(a) > 0$  (le cas  $u(a) < 0$  se traite de manière similaire). Comme  $u$  est continue et  $\Omega$  ouvert il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\overline{B(a, \epsilon)} \subset \Omega$  et  $u > 0$  sur  $\overline{B(a, \epsilon)}$ .

Considérons maintenant la fonction  $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$  construite à l'Exemple 6 de la Section précédente,  $\psi_n(x) = \theta_1(\frac{\|x-a\|^2}{\epsilon^2})$ ; on observe que

$$\psi_n > 0 \quad \text{sur } B(a, \epsilon) \quad \text{et} \quad \psi_n = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus B(a, \epsilon).$$

On déduit alors

$$\int_{\Omega} u(x) \psi_n(x) dx = \int_{B(a, \epsilon)} u(x) \psi_n(x) dx > 0$$

(conséquence de la propriété **(L8)** de l'intégrale de Lebesgue, voir Chapitre 1) ce qui contredit l'hypothèse du lemme et montre le résultat par absurd.

**Remarque 4.5.** *Le lemme peut s'énoncer de la manière équivalente suivante :  $T_u = 0 \implies u = 0$ .*

On introduit l'application suivante :

$$\mathcal{G} : L^1_{loc}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{donnée par} \quad \mathcal{G}(u) = T_u \quad \forall u \in L^1_{loc}(\Omega).$$

L'application  $\mathcal{G}$  associe à chaque fonction  $u$  sa distribution régulière. Alors  $\mathcal{G}(L^1_{loc}(\Omega))$  n'est autre que l'ensemble des distributions régulières.

**Théorème 4.1.** a)  $\mathcal{G}$  est un isomorphisme entre  $L^1_{loc}(\Omega)$  et  $\mathcal{G}(L^1_{loc}(\Omega))$ .  
b)  $\mathcal{G}$  n'est pas surjective (donc  $\mathcal{G}(L^1_{loc}(\Omega)) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$ ).

*Démonstration.*

1. Linéarité de  $\mathcal{G}$  : exercice facile.
2. Injectivité de  $\mathcal{G}$  : conséquence immédiate du Lemme 4.2.
3. Le fait que  $\mathcal{G}$  n'est pas surjective est une conséquence immédiate du Lemma 4.1.

□

L'intérêt de ce théorème est le fait qu'il nous permet "d'identifier" les deux espaces  $L^1_{loc}(\Omega)$  et  $\mathcal{G}(L^1_{loc}(\Omega))$  en identifiant en fait chaque fonction  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  à sa distribution régulière  $T_u$ . Donc on va dire *par abus de langage* que la fonction  $u$  est une distribution en pensant en fait à  $T_u$ . On va dire aussi que la distribution  $T_u$  est une fonction en pensant à  $u$ . On aura alors (en utilisant toujours cette identification)  $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ . (C'est analogue à l'identification entre  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ).

C'est dans ce sens qu'on peut dire que les distributions **généralisent** les fonctions : une fonction localement intégrable est un cas particulier de distribution. De la preuve de **b)** Théorème 4.1 on déduit que les distributions de Dirac ne sont pas des fonctions.

Du Théorème 4.1 on déduit aussi que l'ensemble des distributions régulières est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

## 4.4 Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

On définira une convergence des suite dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (une topologie).

**Définition 4.6.** Soit  $\{T_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  une suite des éléments de  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . On dit que  $T_p \rightarrow T$  en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (on peut dire aussi : au sens des distributions en  $\Omega$ ) pour  $p \rightarrow +\infty$  si

$$\langle T_p, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \text{pour } p \rightarrow +\infty, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Exemple 1 :** Considérons la suite des fonctions :  $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f_p(x) = \begin{cases} p & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.7)$$

avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . Il est facile de voir que  $f_p \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  (on a même  $f_p \in L^1(\mathbb{R})$ ). Alors  $f_p$  peut être vue comme une suite des distributions sur  $\mathbb{R}$  (on pense à  $T_{f_p}$ ). On se demande si'il y a une limite au sens des distributions de  $f_p$ .

On a le calcul suivant : pour toute  $\varphi$  fixée et arbitraire en  $\mathcal{D}(\Omega)$  on a

$$\langle T_{f_p}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_p(x) \varphi(x) dx = p \int_{-1/(2p)}^{1/(2p)} \varphi(x) dx = p \frac{1}{p} \varphi(a_p) = \varphi(a_p)$$

avec  $a_p \in ]-\frac{1}{2p}, \frac{1}{2p}[$  (nous avons utilisé le **théorème de la moyenne** :  $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi)$  avec  $\xi \in ]a, b[$ , pour toute fonction continue  $f$ ). Comme  $|a_p| < \frac{1}{2p}$  nous avons  $a_p \rightarrow 0$  pour  $p \rightarrow +\infty$  et par continuité de  $\varphi$  on a  $\varphi(a_p) \rightarrow \varphi(0)$ . On déduit alors

$$\langle T_{f_p}, \varphi \rangle \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \text{pour } p \rightarrow +\infty$$

donc par définition

$$T_{f_p} \rightarrow \delta$$

ce qui s'écrit plus simplement (en "confondant"  $T_{f_p}$  et  $f_p$ ) :

$$f_p \rightarrow \delta$$

au sens des distributions  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

Cet exemple est important car il donne un sens rigoureux à la fonction  $\delta$  introduite de manière empirique par les physiciens (voir le début de la Section 4.1). Donc la limite pour de tels fonctions comme celle donnée dans l'exemple ci-dessus sera une distribution.

**Exemple 2** : le résultat suivant nous donne des conditions suffisantes assez générales pour avoir la convergence au sens des distributions d'une suite des fonctions vers une autre fonction.

**Proposition 4.6.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert, une suite des fonctions  $\{u_p\}_{p \in \mathbb{N}} \subset L^1_{loc}(\Omega)$  et une fonction  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . On suppose que*

1. *Pour presque tout  $x \in \Omega$  on a  $u_p(x) \rightarrow u(x)$  pour  $p \rightarrow \infty$  (la convergence simple presque partout)*
2. *Il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  et  $v \in L^1_{loc}(\Omega)$  avec  $v(x) \geq 0$ , p.p.  $x \in \Omega$  tel que*

$$|u_p(x)| \leq v(x), \quad \text{p.p. } x \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, p \geq p_0.$$

Alors  $T_{u_p} \mapsto T_u$  en  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (on peut aussi dire :  $u_p \mapsto u$  au sens des distributions sur  $\Omega$  ou au sens  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ).

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  fixé. Il faut montrer que  $\int_{\Omega} u_p \varphi \mapsto \int_{\Omega} u \varphi$  pour  $p \mapsto +\infty$ . Soit  $K \subset \Omega$  compact tel que  $\varphi = 0$  sur  $\Omega \setminus K$ ; il est clair que chacune des intégrales ci-dessus peuvent s'écrire sur  $K$  au lieu de  $\Omega$ .

*Exercice :* En utilisant le Théorème de convergence dominée de Lebesgue sur  $K$  montrer qu'on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_K u_p(x) \varphi(x) dx = \int_K u(x) \varphi(x) dx$$

ce qui nous donne le résultat. □

**Exemple :** Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  on définit la fonction  $H_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$H_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2p} \\ p(x + \frac{1}{2p}) & \text{si } -\frac{1}{2p} \leq x \leq \frac{1}{2p} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2p} \end{cases}$$

Utilisons la proposition précédente avec  $u_p = H_p$ . On observe d'abord que  $H_p \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  car  $H_p$  est bornée. Ensuite on voit que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (donc pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ) on a  $H_p(x) \rightarrow H(x)$  (fonction de Heaviside) pour  $p \rightarrow +\infty$ , donc la première hypothèse de la proposition est satisfaite avec  $u = H$ . Il est facile de voir que la deuxième hypothèse de la proposition est satisfaite avec  $v$  égale à la fonction constante 1 qui est dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . On déduit alors que  $H_p$  converge vers  $H$  au sens des distributions sur  $\mathbb{R}$ ; ceci s'écrit aussi  $T_{H_p} \rightarrow T_H$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Remarque 4.6.** Si la suite des fonctions  $u_p$  converge uniformément vers  $u$  alors les deux hypothèses de la proposition précédente sont satisfaites (pour la première c'est évident, pour la deuxième : si  $p \in \mathbb{N}$  est assez grand on a  $u_p = (u_p - u) + u$  donc  $|u_p| \leq |u_p - u| + |u| \leq 1 + |u|$  donc on peut prendre  $v = |u| + 1$ ). On a donc la convergence au sens des distributions de  $u_p$  vers  $u$ .

## 4.5 Dérivation des distributions

On veut définir la dérivée d'une distribution, de telle manière que si en particulier cette distribution est une fonction de classe  $C^1$  alors la dérivée au sens des distributions soit tout simplement la dérivée au sens habituel.

Plus précisément, on veut :  $\frac{\partial}{\partial x_k}(T_u) = T_{\frac{\partial u}{\partial x_k}}$  si  $u \in C^1(\Omega)$ . Faisons ceci dans le cas plus simple où  $\Omega$  est un intervalle ouvert inclus dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $u \in C^1(I)$  et  $I = ]a, b[$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Alors pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$  on veut avoir  $(T_u)', \varphi > = < T_{u'}, \varphi >$  ce qui donne

$$< (T_u)', \varphi > = < T_{u'}, \varphi > = \int_I u'(x) \varphi(x) dx = - \int_I u(x) \varphi'(x) dx + [u\varphi]_{x=a}^{x=b}$$

(on a utilisé l'intégration par parties). La dernière expression est égale à zero, car  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ , ce qui nous donne

$$< (T_u)', \varphi > = - < T_u, \varphi' >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

On va prendre cette dernière relation comme définition de la dérivée pour toute distribution  $T$ . Il y a un calcul analogue pour la dérivation à un ordre  $k \in \mathbb{N}^*$  arbitraire (faire plusieurs intégrations par parties successivement) et aussi en dimension quelconque de l'espace. Il est donc naturel d'avoir la définition suivante :

**Définition 4.7.** Soit  $\Omega$  un ouvert en  $\mathbb{R}^n$ ,  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ . On appelle **dérivée à l'ordre  $\alpha$  de  $T$**  (on peut ajouter : au sens de distributions) la distribution sur  $\Omega$  notée  $D^\alpha T$  ou  $\frac{\partial^{[\alpha]} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  définie par

$$< D^\alpha T, \varphi > = (-1)^{[\alpha]} < T, D^\alpha \varphi >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (4.8)$$

avec la notation  $[\alpha] = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .



On peut vérifier facilement, en utilisant la linéarité de  $T$  et de l'opérateur  $D^\alpha$  que l'égalité (4.8) définit bien une distribution sur  $\Omega$ .

**Remarque :** Toute distribution peut se dériver et à n'importe quel ordre, le résultat étant encore une distribution. Ceci, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions, où toute fonction ne peut pas se dériver.

**Cas particulier :** Pour tout  $i \in \{1, 2 \dots n\}$  on a

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Notation :** Si  $n = 1$  on va noter les dérivée d'une distribution  $T$  par  $T', T'', T^{(3)}, \dots, T^{(k)}$  exactement comme les dérivées classiques d'une fonction à une variable (on utilise la convention habituelle  $T^{(0)} = T$ ). On a donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Exemple 1 :**

**Proposition 4.7.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et  $u \in C^k(I)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Alors on a :

$$(T_u)^{(k)} = T_{u^{(k)}}.$$

(donc pour une fonction de classe  $C^k$  la dérivée  $k$ -ème au sens des distributions se confond avec la dérivée  $k$ -ème au sens habituel).

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$  arbitraire. Alors  $\varphi$  ainsi que toutes ses dérivées s'annule en dehors d'un compact  $[a, b] \subset I$ . On a

$$\begin{aligned} \langle (T_u)^{(k)}, \varphi \rangle &= (-1)^k \langle T_u, \varphi^{(k)} \rangle = (-1)^k \int_I u \varphi^{(k)} = (-1)^k \int_a^b u(x) \varphi^{(k)}(x) dx = \\ &= (-1)^{k-1} \int_a^b u'(x) \varphi^{(k-1)}(x) dx = \dots = \int_a^b u^{(k)}(x) \varphi(x) dx = \int_I u^{(k)} \varphi = \langle T_{u^{(k)}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

(on a appliqué  $k$  fois l'intégration par parties et à chaque fois le terme "frontière" est égal à zero, car  $\varphi$  et ses dérivées s'annulent aussi en  $a$  et  $b$  par continuité).  $\square$

Ce résultat se généralise en dimension quelconque :

**Exemple 2 :**

**Proposition 4.8.** Soit  $\Omega$  ouvert en  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in C^k(\Omega)$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Alors on a

$$D^\alpha(T_u) = T_{D^\alpha u}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } [\alpha] \leq k.$$

*Démonstration.* On fera la preuve pour  $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i}$  ; pour un  $\alpha$  général le résultat se démontre facilement par recurrence.

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(T_u), \varphi \right\rangle = - \left\langle T_u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{\partial\Omega} u \varphi \nu_i d\sigma.$$

(nous avons appliqué la formule de **Green**, le dernier terme étant une intégrale sur la frontière de  $\Omega$ ;  $\nu_i$  désigne ici la  $i$ -ème composante du vecteur  $\nu$  qui est le vecteur **normal** à  $\partial\Omega$  orienté vers l'extérieur de  $\Omega$ ). Comme  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  l'intégrale sur  $\partial\Omega$  est égale à zéro et on obtient :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(Tu), \varphi \right\rangle = \left\langle T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle \quad \text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(Tu) = T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

□

Calculons la dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside  $H$ , qui peut être vue comme une distribution sur  $\mathbb{R}$ , car  $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ; nous voulons donc calculer  $(T_H)'$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  fixé; il existe  $M > 0$  tel que  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont 0 sur  $\mathbb{R} \setminus ]-M, M[$ . On a alors

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x) dx = - \int_0^M \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

(car  $\varphi(M) = 0$ ) ce qui nous donne

$$(T_H)' = \delta \tag{4.9}$$

(on peut dire aussi :  $H' = \delta$  au sens des distributions sur  $\mathbb{R}$ ).

Nous allons donner une généralisation de cet exemple.

**Proposition 4.9.** *Soit  $I = ]a, b[$  un intervalle ouvert, avec  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  par morceaux sur  $I$  et qui n'est pas de classe  $C^1$  sur  $I$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, a_2, \dots, a_k$  comme dans la Définition 1.1. La fonction  $f$  aura alors une dérivée classique  $f'$  définie presque partout (partout sauf dans les points  $a_1, a_2, \dots, a_k$ ). Pour tout  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  nous notons par  $\omega(f, a_j)$  le "saut" de la fonction  $f$  en  $a_j$ , défini par*

$$\omega(f, a_j) = f(a_j+) - f(a_j-).$$

Alors

**a)** Les fonction  $f$  et  $f'$  sont dans  $L^1_{loc}(I)$

**b)** La dérivée au sens des distributions de  $f$  est donnée par la formule :

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{j=1}^k \omega(f, a_j) \delta_{a_j}.$$

*Démonstration.* **a)** Comme  $f$  et  $f'$  sont continues par morceaux sur  $I$  alors elles sont dans  $L^1_{loc}(I)$  (voir partie 3. de la Proposition 3.3).

**b)** Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(I)$  arbitraire fixé. Il existe  $a_0 \in ]a, a_1[$  et  $a_{k+1} \in ]a_k, b[$  tels que  $\varphi = 0$  sur  $]a, a_0]$  et sur  $[a_{k+1}, b[$ .

Nous avons

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{a_0}^{a_{k+1}} f(x)\varphi'(x) dx = - \sum_{j=0}^k \int_{a_j}^{a_{j+1}} f(x)\varphi'(x) dx.$$

En utilisant une intégration par parties pour chacune des intégrales, on obtient

$$\begin{aligned} \langle (T_f)', \varphi \rangle &= \sum_{j=0}^k \left[ -f(a_{j+1}-)\varphi(a_{j+1}) + f(a_j+)\varphi(a_j) + \int_{a_j}^{a_{j+1}} f'(x)\varphi(x) dx \right] = \\ &= [-f(a_1-)\varphi(a_1) + f(a_0+)\varphi(a_0)] + [-f(a_2-)\varphi(a_2) + f(a_1+)\varphi(a_1)] + \cdots + \\ &\quad + [-f(a_{k+1}-)\varphi(a_{k+1}) + f(a_k+)\varphi(a_k)] + \int_{a_0}^{a_{k+1}} f'(x)\varphi(x) dx. \end{aligned}$$

En détaillant ces expressions on obtient

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = \int_I f'(x)\varphi(x) dx + \sum_{j=1}^k \omega(f, a_j)\varphi(a_j)$$

(en tenir compte du fait que  $\varphi(a_0) = \varphi(a_{k+1}) = 0$ ) ce qui nous donne le résultat. □

**Corollaire 4.1.** *Soit  $I$  comme dans la Proposition 4.9 et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et de classe  $C^1$  par morceaux sur  $I$ . Alors on a*

$$(T_f)' = T_{f'}$$

(car par continuité de  $f$  tous les sauts  $\omega(f, a_j)$  sont 0).

*Exemples :*

On peut définir un **opérateur**  $D^\alpha$  qui associe à toute distribution  $T$  la distribution  $D^\alpha T$ . On a les propriétés suivantes de cet opérateur :

**Proposition 4.10.** *Pour toute  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et tous  $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^n$  on a*

$$D^\alpha(D^\gamma T) = D^\gamma(D^\alpha T) = D^{\alpha+\gamma}T.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  fixé arbitraire. On a

$$\langle D^\alpha(D^\gamma T), \varphi \rangle = (-1)^{[\alpha]} \langle D^\gamma T, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{([\alpha]+[\gamma])} \langle T, D^\gamma(D^\alpha \varphi) \rangle$$

Comme  $D^\gamma(D^\alpha \varphi) = D^\alpha(D^\gamma \varphi) = D^{\alpha+\gamma} \varphi$  et  $[\alpha] + [\gamma] = [\alpha + \gamma]$  on a immédiatement le résultat. □

**Proposition 4.11.** *(linéarité de  $D^\alpha$ ) :*

*L'opérateur  $D^\alpha$  est linéaire, c'est à dire :*

$$D^\alpha(\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2) = \beta_1 D^\alpha T_1 + \beta_2 D^\alpha T_2, \quad \forall \beta_1, \beta_2 \in C, \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

*Démonstration.* Exercice facile □

**Proposition 4.12.** (*continuité de  $D^\alpha$* ) :

Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  fixé et  $T_p \rightarrow T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  pour  $p \rightarrow +\infty$ . Alors on a

$$D^\alpha T_p \rightarrow D^\alpha T \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{pour} \quad p \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  fixé arbitraire. Grâce à l'hypothèse  $T_p \rightarrow T$  on a

$$\langle D^\alpha T_p, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_p, D^\alpha \varphi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha T, \varphi \rangle \quad \text{pour} \quad p \rightarrow +\infty$$

ce qui donne le résultat. □

*Exemple : en classe.*

## 4.6 Produit entre une fonction $C^\infty$ et une distribution

On définira le produit entre une fonction  $C^\infty$  et une distribution de telle manière que si la distribution est une fonction localement intégrable, le résultat soit le produit habituel des fonction.

On voudrait donc : si  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  et  $g \in C^\infty(\Omega)$  alors  $g \cdot T_u = T_{gu}$ . On aurait alors pour tous  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  :

$$\langle g \cdot T_u, \varphi \rangle = \langle T_{gu}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} gu\varphi \, dx = \langle T_u, g\varphi \rangle .$$

Il est alors naturel de donner la définition suivante :

**Définition 4.8.** Soit  $g \in C^\infty(\Omega)$  et  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . On définit le produit de  $g$  par  $T$  noté  $g \cdot T$  comme la distribution définie par

$$\langle g \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

*On vérifie très facilement que l'égalité précédente définit bien une distribution.*

**Conséquences immédiates :**

Pour tout  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  on a

1. Si  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  et  $g \in C^\infty(\Omega)$  alors  $g \cdot T_u = T_{gu}$ .

2. Si  $f, g \in C^\infty(\Omega)$  alors  $f \cdot (g \cdot T) = (fg) \cdot T$
3. Si  $g \equiv \text{constante} = \lambda$  alors  $g \cdot T = \lambda T$  (le produit entre le scalaire  $\lambda$  et  $T$ ; en particulier  $1 \cdot T = T$ ).

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  fixé arbitraire. On a

1.

$$\langle g \cdot T_u, \varphi \rangle = \langle T_u, g\varphi \rangle = \int_{\Omega} u g \varphi dx = \langle T_{gu}, \varphi \rangle .$$

ce qui donne l'égalité désirée.

2.

$$\langle f \cdot (g \cdot T), \varphi \rangle = \langle g \cdot T, f\varphi \rangle = \langle T, gf\varphi \rangle = \langle (fg) \cdot T, \varphi \rangle$$

ce qui montre la résultat.

3.

$$\langle \lambda \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, \lambda\varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$$

ce qui finit la preuve. □

**Exemple fondamental :** Soit  $a \in \Omega$  et  $g \in C^\infty(\Omega)$ . Alors

$$g \cdot \delta_a = g(a)\delta_a.$$

(produit entre le scalaire  $g(a)$  et la distribution  $\delta_a$ ).

*Démonstration.* Pour un  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  fixé arbitraire on a

$$\langle g \cdot \delta_a, \varphi \rangle = \langle \delta_a, g\varphi \rangle = g(a)\varphi(a) = g(a) \langle \delta_a, \varphi \rangle = \langle g(a)\delta_a, \varphi \rangle$$

ce qui finit la preuve.

**Conséquence :** en  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  on a  $x \cdot \delta = 0$

**Proposition 4.13.** Si  $g \in C^\infty(\Omega)$  et  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g \cdot T) = \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot T + g \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

(en dimension 1 cela devient :  $(g \cdot T)' = g' \cdot T + g \cdot T'$ ).

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  arbitraire. Nous avons

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(g \cdot T), \varphi \right\rangle = - \left\langle g \cdot T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \left\langle T, g \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En utilisant l'égalité  $g \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial(g\varphi)}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \varphi$  on déduit

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(g \cdot T), \varphi \right\rangle &= - \left\langle T, \frac{\partial(g\varphi)}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial g}{\partial x_i} \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, g\varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot T, \varphi \right\rangle = \\ &= \left\langle g \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot T, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat. □

**Exemple :** En  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  on a

$$(x \cdot \delta)' = x' \cdot \delta + x \cdot \delta' = \delta + x \cdot \delta'.$$

Comme  $x \cdot \delta = 0$  donc  $(x \cdot \delta)' = 0$  on déduit

$$x \cdot \delta' = -\delta.$$

**Remarque :** on peut obtenir cette formule en utilisant la définition et les fonctions test : soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  arbitraire; on a

$$\langle x \cdot \delta', \varphi \rangle = \langle \delta', x\varphi \rangle = - \langle \delta, (x\varphi)' \rangle = - \langle \delta, \varphi + x\varphi' \rangle.$$

Ceci nous donne

$$\langle x \cdot \delta', \varphi \rangle = -\varphi(0) = - \langle \delta, \varphi \rangle$$

ce qui nous donne le résultat.

## 4.7 Une brève introduction aux espaces de Sobolev

Rappelons d'abord que si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et si  $u \in L^2(\Omega)$  alors  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  (car de la Proposition 3.3 on déduit  $L^2(\Omega) \subset L^2_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ ) donc  $T_u$  est une distribution sur  $\Omega$ .

On peut définir alors :

**Définition 4.9.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On pose

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ et } \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \exists v_k \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial}{\partial x_k}(T_u) = T_{v_k} \right\}.$$

C'est un exemple **d'espace de Sobolev** sur  $\Omega$ . Par abus de langage, la définition de  $H^1(\Omega)$  peut s'écrire :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } k = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

(la dérivée  $\frac{\partial}{\partial x_k}$  est comprise au sens des distributions;  $\frac{\partial u}{\partial x_k}$  qui est a priori une distribution, doit être une fonction dans  $L^2(\Omega)$ . On confond ici les fonctions avec les distributions régulières associées).

On a aussi l'espace de Sobolev plus général suivant :

**Définition 4.10.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . On pose

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } [\alpha] \leq m \quad \exists v_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha(T_u) = T_{v_\alpha} \right\}.$$

qui peut encore s'écrire :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ avec } [\alpha] \leq m \right\}.$$

Par exemple on a

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \text{ pour tous } i, j = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

**Remarque 4.7.** 1. Par convention nous posons  $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

2. L'ensemble  $H^m(\Omega)$  est un sous-ensemble de  $L^2(\Omega)$ ; on utilise comme pour  $L^2(\Omega)$  la convention qu'on confond deux fonctions de  $H^m(\Omega)$  qui sont égales presque partout.

On a le résultat suivant :

**Proposition 4.14.** Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  on a

1. L'ensemble  $H^m(\Omega)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , qu'il faut voir comme un sous-espace vectoriel de  $L^2(\Omega)$

2.

$$H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega).$$

*Démonstration.*

1. Soient  $u, v \in H^m(\Omega)$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  et il faut montrer que  $au + bv \in H^m(\Omega)$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multiindice arbitraire avec  $[\alpha] \leq m$ . Comme  $D^\alpha(au + bv) = aD^\alpha u + bD^\alpha v$ , avec  $D^\alpha u, D^\alpha v \in L^2(\Omega)$  et comme  $L^2(\Omega)$  est un espace vectoriel alors  $D^\alpha(au + bv) \in L^2(\Omega)$ , ce qui finit la preuve.

2. Soit  $u \in H^{m+1}(\Omega)$  et il faut montrer  $u \in H^m(\Omega)$ . Pour cela considérons encore  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  un multiindice arbitraire avec  $[\alpha] \leq m$ . On a alors que  $[\alpha] \leq m + 1$  ce qui nous donne  $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$  (car  $u \in H^{m+1}(\Omega)$ ). Ceci finit la preuve. □

Nous finissons ce chapitre en donnant une classe importante des fonctions qui sont dans  $H^m(\Omega)$ .

**Proposition 4.15.** Soit  $m \in \mathbb{N}$  et  $\Omega$  un ensemble ouvert et borné. Alors

$$C^m(\overline{\Omega}) \subset H^m(\Omega).$$

*Démonstration.* Soit  $u \in C^m(\overline{\Omega})$  arbitraire et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  avec  $[\alpha] \leq m$ . Alors  $D^\alpha u$  se prolonge par continuité sur  $\overline{\Omega}$  qui est un ensemble compact. Le Théorème de Weierstrass nous dit alors que  $D^\alpha u$  est bornée sur  $\Omega$  donc elle est dans  $L^2(\Omega)$  car  $\Omega$  est bornée. □

*Exemple :* la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est dans  $H^1(\Omega)$  si  $\Omega = ]1, 2[$  (car elle est dans  $C^1([1, 2])$ ), mais cette même fonction n'est pas dans  $H^1(\Omega)$  si  $\Omega = ]0, 1[$  (car elle n'est même pas dans  $L^2(\Omega)$ ).

# Bibliographie

- [1] M. Briane, G. Pagès, *Analyse : Théorie de l'intégration, Convolution et transformée de Fourier*
- [2] T. Gallouet, R. Herbin, *Mesure, intégration, probabilités*
- [3] G. Demengel, *Transformations de Laplace. Théorie et illustrations par les exemples*
- [4] B. Aebischer, *Analyse : Fonctions de plusieurs variables et géométrie analytique*
- [5] G. Laville, *Courbes et Surfaces*
- [6] C. Gasquet, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique, ondelettes*
- [7] R. Dalmasso, P. Witomski, *Analyse de Fourier et applications. Exercices corrigés*
- [8] N. Boccara, *Distributions*
- [9] F. Demengel, G. Demengel, *Mesure et distributions, théorie et illustrations par les exemples*