Corrigé Examen AN 2018 - 2019 Polytech MAM 3A

Exo 1.

a) Pour $g(x)=1$

$1 = \alpha(1+1)$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$

Pour $g(x) = x$

$\frac{1}{2} = \alpha\left[\frac{1}{2}+\beta+\frac{1}{2}-\beta\right] = \alpha$ (vraie car $\alpha = \frac{1}{2}$)

Pour $g(x) = x^2$

$\frac{1}{3} = \alpha\left[\left(\frac{1}{2}+\beta\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)^2\right]$ donc

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\beta+\beta^2+\frac{1}{4}-\beta+\beta^2\right) \Leftrightarrow$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{2}+2\beta^2 \Leftrightarrow 2\beta^2 = \frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow \beta^2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \beta = \sqrt{\frac{1}{12}}$ (car $\beta > 0$)

$\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Pour $g(x) = x^3$ donc

$\frac{1}{4} = \alpha\left[\left(\frac{1}{2}+\beta\right)^3+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)^3\right]$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8}+\cancel{3\frac{1}{4}\beta}+3\frac{1}{2}\beta^2+\cancel{\beta^3}+\frac{1}{8}-\cancel{3\frac{1}{4}\beta}+3\frac{1}{2}\beta^2-\cancel{\beta^3}\right]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{4}+3\beta^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 3\beta^2 \Leftrightarrow \frac{1}{12} = \beta^2$ vraie

Donc l'ordre de la formule est au moins 3

avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Il faut montrer

Pour montrer que la formule est d'ordre 3 ~~on doit montrer~~ que l'égalité est fausse pour $g(x) = x^4$: ~~on doit avoir~~ a-t-on : $\frac{1}{5} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^4\right]$?

On développe : $\frac{1}{5} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cancel{4\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{6}}+6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\cancel{4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^4+\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\cancel{4\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{\sqrt{3}}{6}}+6\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2-\cancel{4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^3}+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^4\right] \Leftrightarrow$

$\frac{1}{5} = \frac{2}{2}\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{144}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{9+18+1}{144} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{28}{144}$ ce qui est faux!

donc ordre $= 3$.

b) $I(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$.

Nous introduisons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la fonction

$\theta_i : [0, 1] \longrightarrow [a_{i-1}, a_i]$ (bijection)

$\theta_i(t) = a_{i-1} + t(a_i - a_{i-1}) = a_{i-1} + th$

Alors

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx = \int_0^1 g_i(t)(a_i - a_{i-1})\,dt = h\int_0^1 g_i(t)\,dt$$

avec $g_i = f \circ \theta_i$

$g_i(t) = f(a_{i-1} + t\,h)$

D'autre part, en suivant a) on a

$$\int_0^1 g_i(t)\,dt \sim \frac{1}{2}\left[g_i\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) + g_i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right]$$

Alors

$$\int_0^1 g_i(t)\,dt \sim \frac{1}{2}\left[f\left(a_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) + f\left(a_{i-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right)\right]$$

Donc une approximation par la formule composée de f sera

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(a_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) + f\left(a_{i-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right)\right]$$

Exercice 2

a) En utilisant la formule de Duhamel on trouve

$$x(t) = e^{2t}(-1) + \int_0^t e^{2(t-s)}(s+1)\,ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Nous avons

$$\int_0^t e^{2(t-s)}(s+1)\,ds = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(\frac{e^{2(t-s)}}{-2}\right)(s+1)\,ds$$

intégration par parties

$$= -\frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{2}e^{2t}(0+1) + \int_0^t \underbrace{\frac{e^{2(t-s)}}{2}}_{=\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{2(t-s)}}{-4}\right)} \underbrace{\frac{d}{ds}(s+1)}_{=1}\,ds$$

$$= -\frac{1}{2}(t+1) + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

Alors

$$\cancel{x(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4}}$$

$$\int_0^t e^{2(t-s)}(s+1)\,ds = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4} - \frac{t}{2}$$

Alors

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{2t} - \frac{3}{4} - \frac{t}{2}$$

b) (i) Méthode Euler explicite

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), & n = 0, 1 \dots N-1 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

On a posé $f(t,x) = 2x + t + 1, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$

Alors

$$x_1 = x_0 + hf(0, x_0) = -1 + (2(-1) + 0 + 1) \cdot 0.1$$
$$= -1 - 0.1 = -1.1$$

$\cancel{x_1 = x_1}$

$$\cancel{x_2 = x_1 + hf(h, x_1)}$$
$$\cancel{= -1.1 + 0.1(-2.1.1 + 0.1 + 1)}$$
$$\cancel{= -1.1 + 0.1(-1.1)}$$
$$\cancel{= -1.1 - 0.11 = -1.21}$$

(i) Methode de Taylor

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, x_n) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial x}(t_n, x_n) f(t_n, x_n) \right] h_n^2 \\ x_0 = -1 \end{cases}$$

On a : $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = 1$; $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 2.$

Alors

$$x_{n+1} = x_n + h(2x_n + t_n + 1) + \frac{1}{2}\left(\cancel{4} + 2(2x_n + t_n + 1)\right) h^2$$

donc

$$x_{n+1} = x_n + h(2x_n + t_n + 1) + \frac{1}{2}\left(4x_n + 2t_n + 3\right) h^2$$

Alors

$$x_1 = -1 + 0{,}1(-2 + 0 + 1) + \frac{1}{2}(-4 + 0 + 3)\, 0{,}01$$

$$x_1 = -1 - 0{,}1 - 0{,}005 = -1{,}105$$

~~$x_2 = -1{,}105 + 0{,}1$~~

Exercice 3.

a) Comme $x_p > \alpha$ alors $f'(x_p) \neq 0$ donc x_{p+1} est bien definie.

Alors

$$(1)' \quad x_{p+1} - \alpha = x_p - \alpha - \frac{f(x_p)}{f'(x_p)} = \frac{f'(x_p)(x_p - \alpha) - f(x_p)}{f'(x_p)}$$

On a par Taylor :

$$f(\alpha) = f(x_p) + f'(x_p)(\alpha - x_p) + \frac{1}{2} f''(c_p)(\alpha - x_p)^2$$

Comme $f(\alpha) = 0$ alors

$$f'(x_p)(x_p - \alpha) - f(x_p) = \frac{1}{2} f''(c_p)(\alpha - x_p)^2$$

ce qui donne le resultat avec $(1)'$.

On en deduit $x_{p+1} > \alpha$ (car $\frac{f''(c_p)}{f'(x_p)} > 0$)

Nous montrons facilement par recurrence que (x_k) est bien définie et $x_k > \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

b) Nous avons

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < 0 \quad \text{car } x_k > \alpha$$

(on utilise l'hypothèse)

Comme $x_k > \alpha$ alors (x_k) est borné inférieurement et strictement decroissant, donc (x_k) est convergent.
Alors il existe $l \geq \alpha$ tel que

$$x_k \longrightarrow l \quad \text{pour } k \to \infty$$

Montrons par absurd que $l = \alpha$
Si $l > \alpha$ alors en passant à la limite en (4)

$$\Rightarrow l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \iff \frac{f(l)}{f'(l)} = 0$$

impossible car $l > \alpha$.

c) Vue en cours : la methode est au moins d'ordre 2.

d) f a n racines distinctes ; alors par le Théorème de Rolle $\Rightarrow$ f' a $n-1$ racines distinctes et f'' a $n-2$ racines distinctes
Si on note α_1 la racine la plus grande de f' alors

$$\alpha_1 < \alpha$$

Pareil si on note α_2 la racine la plus grand de f'' alors

$$\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha$$

Supposons que f s'écrit

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \; a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$.

~~Alors avons~~

$$\cancel{\lim_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}}$$

Il est clair que f, f' et f'' ne s'annulent pas sur $]\alpha, +\infty[$

~~Pareil~~

~~$\lim f'(x)$~~

On a : $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots$

$f''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \cdots$

Il est évident que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f'(x) = \lim_{x \to \infty} f''(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Alors f, f' et f'' ont le même signe sur $]\alpha, +\infty[$: c'est le signe de a_n.

Alors les hypothèses de l'exercice sont satisfaites

(on a aussi $f'(\alpha) \neq 0$)

On en déduit que (x_k) converge vers α et l'ordre de convergence est au moins 2.