Corrigé Partiel 1 AN 2018 - 2019

Exo 1.

a) Pour (2) on a

$$\frac{U_1 - U_0}{h} = \alpha U_0 \quad \text{c'est à dire}$$

$U_1 - U_0 = \alpha h U_0$ donc

$(1+\alpha h) U_0 = U_1$: comme $1 + \alpha h > 0$ on a

(*1) $U_0 = \frac{1}{1+\alpha h} U_1$

De même pour (3) :

$$\frac{U_{N+1} - U_N}{h} = -\alpha U_{N+1} \quad \text{c'est à dire}$$

$U_{N+1} - U_N = -\alpha h U_{N+1}$ donc

$(1+\alpha h) U_{N+1} = U_N$: comme $1 + \alpha h > 0$ on a

(*2) $U_{N+1} = \frac{1}{1+\alpha h} U_N$

b) On a

$$-\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} = f(x_i) \quad , \quad \forall i = 1, 2 \dots N$$

donc

$$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} = \underbrace{h^2 f(x_i)}_{\text{notés } b_i} \quad \forall i = 1, 2 \dots N$$

Pour $i = 0$ on utilise (*1) qui donne U_0 en fonction de U_1.

De même pour $i = N$ on utilise (*2) qui donne U_{N+1} en fonction de U_N. On obtient

$$\begin{cases} -\frac{1}{1+\alpha h} U_1 + 2U_1 - U_2 = b_1 \\ -U_1 + 2U_2 - U_3 = b_2 \\ \vdots \\ -U_{N-2} + 2U_{N-1} - U_N = b_{N-1} \\ -U_{N-1} + 2U_N - \frac{1}{1+\alpha h} U_N = b_N \end{cases}$$

On a aussi

$$-\frac{1}{1+\alpha h} U_1 + 2U_1 = \left(2 - \frac{1}{1+\alpha h}\right) U_1 = \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} U_1$$

et aussi

$$2U_N - \frac{1}{1+\alpha h} U_N = \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} U_N .$$

Alors la première equation du systeme s'ecrit

$$\frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} U_1 - U_2 = b_1$$

et la dernière equation du systeme s'ecrit

$$-U_{N-1} + \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} U_N = b_N$$

En posant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$

alors le systeme s'ecrit

$AU = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} \end{pmatrix}$$

c) Il est evident que A est symetrique.
Soit $x \in \mathbb{R}^N$ arbitraire. On a

$$\langle Ax, x \rangle = \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 \cdots - 2x_{N-2}x_{N-1} + 2x_{N-1}^2 - 2x_{N-1}x_N + \frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} x_N^2 .$$ ~~Alors~~

On observe que

$$\frac{1+2\alpha h}{1+\alpha h} = \frac{1+\alpha h + \alpha h}{1+\alpha h} = 1 + \frac{\alpha h}{1+\alpha h}.$$ Alors

$\langle Ax, x\rangle = \frac{\alpha h}{1+\alpha h} x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$

$+ \dots x_{N-2}^2 - 2x_{N-2}x_{N-1} + x_{N-1}^2 + x_{N-1}^2 - 2x_{N-1}x_N + x_N^2$

$+ \frac{\alpha h}{1+\alpha h} x_N^2 = \frac{\alpha h}{1+\alpha h}(x_1^2 + x_N^2) + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 +$

$+ \dots (x_{N-1} - x_N)^2.$

On observe que $\forall x \in \mathbb{R}^N$

$\langle Ax, x\rangle \geq 0$

et si $\langle Ax, x\rangle = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_N = 0 \\ x_1 = x_2 \\ x_2 = x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} = x_N \end{cases}$ ce qui donne $x = 0$

Donc A est définie positive

<u>Exercice 2.</u>

a) $\|A\|_\infty = \max\{2+1, 1+2+1, 1+2\} = 4$

b) $\|A\|_1 = \max\{2+1, 1+2+1, 1+2\} = 4$ (car A symétrique

c) $\|A\|_2 = \rho(A)$

Alors il faut calculer les valeurs propres de A

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

~~$l_1 + l_2 \cdot (\lambda-2) \longrightarrow l_1$~~ ligne 1 + (ligne 2)$\cdot(\lambda-2) \longrightarrow$ ligne 1

$= \det\begin{pmatrix} 0 & 1-(\lambda-2)^2 & \lambda-2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$ développe colonne 1

$= -\det\begin{pmatrix} -\lambda^2+4\lambda-3 & \lambda-2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-2)\det\begin{pmatrix} -\lambda^2+4\lambda-3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Donc

$P_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$

Une racine de P_A est $\lambda = 2$

les racines de
$$x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \text{sont}$$
$$x_1 = 2 + \sqrt{2}$$
$$x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

Donc $Sp(A) = \{ 2-\sqrt{2},\ 2,\ 2+\sqrt{2} \}$

Alors $\rho(A) = 2+\sqrt{2} = \|A\|_2$.

<u>Exercice 3.</u>

a) ~~Soit $x \in K^n$ avec~~ On suppose par absurd qu'il existe $x \in K^n$ avec $x \neq 0$ tel que $(I_n + B)x = 0$. Alors

$x + Bx = 0$ donc

$x = -Bx$. On applique la norme $\|.\|$

$\|x\| = \|-Bx\| \leq \|B\| . \|x\|$

impossible car $\|x\| > 0$ et $\|B\| < 1$.

b) Nous avons
$$(I_n + B)(I_n + B)^{-1} = I_n$$
donc en developpant on a
$$I_n (I_n + B)^{-1} + B(I_n + B)^{-1} = I_n$$
donc
$$(I_n + B)^{-1} = I_n - B(I_n + B)^{-1}$$

On applique la norme $\|.\|$ ce qui donne
$$\|(I_n + B)^{-1}\| \leq \underbrace{\|I_n\|}_{=1} + \underbrace{\|B(I_n + B)^{-1}\|}_{\leq \|B\| . \|(I_n + B)^{-1}\|}$$

donc
$$\|(I_n + B)^{-1}\| \underbrace{(1 - \|B\|)}_{>0} \leq 1$$
donc
$$\|(I_n + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$