Corrigé Partiel 2. AN 2018-2019

Exo 1.

a) La matrice du système est

$$S = S^{(1)} = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Etape 1.

Pas besoin d'échanges des lignes $\qquad \alpha_2^{(1)} = \frac{2}{1} = 2$

~~ligne 1 $\cdot$ (-1)~~ pivot $A_{11} = 1$

ligne 2 $\leftarrow$ ligne 2 $+ (-2)$ ligne 1 $\qquad \alpha_3^{(1)} = \frac{3}{1} = 3$

ligne 3 $\leftarrow$ ligne 3 $+ (-3)$ ligne 1

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & -5 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$ matrice système à la fin étape 1

Etape 2. (la dernière)

pivot $(S^{(2)})_{22} = -1$

$$\alpha_3^{(2)} = \frac{-5}{-1} = 5$$

ligne 3 $\leftarrow$ ligne 3 $+ (-5)$ ligne 2

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 28 & 7 \end{pmatrix}$$

Le système équivalent au système initial s'écrit

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ \quad - x_2 - 7x_3 = -2 \\ \quad\quad 28 x_3 = 7 \end{cases}$$

Ceci donne par une remontée.

$$\begin{cases} x_3 = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \\ x_2 = 2 - 7\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ x_1 = 1 - 2\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc la solution est $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

b) Nous avons $S^{(3)} = \left(A^{(3)} \; b \right)$

et on pose $U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}$ matrice triangulaire supérieure.

Nous avons par la théorie

$A = \underbrace{L^{(1)} L^{(2)}}_{=L} U = LU$

avec $\cancel{L^{(1)} L^{(2)}}$ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ Triang ~~sup~~ inf avec ~~...~~ 1 sur la diagonale

Exercice 2.

a) $f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$

$f(x_0) = \sin(0) = 0$

$f(x_1) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$f(x_2) = \sin(3\pi) = 0$

$f(x_0, x_1) = \dfrac{0+1}{0 - \frac{\pi}{2}} = -\dfrac{2}{\pi}$

$f(x_1, x_2) = \dfrac{-1-0}{\frac{\pi}{2} - \pi} = \dfrac{2}{\pi}$

$f(x_0, x_1, x_2) = \dfrac{-\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}}{0 - \pi} = \dfrac{4}{\pi^2}$

donc

$f(x) = 0 - \frac{2}{\pi}(x - 0) + \frac{4}{\pi^2}(x-0)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = -\frac{2}{\pi} x + \frac{4}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Po

b) $f'(x) = 3\cos(3x)$

$f''(x) = -9\sin(3x)$

$f^{(3)}(x) = -27\cos(3x)$

$f^{(4)}(x) = 3^4 \sin(3x) = 3^4 f(x)$

par récurrence on montre

$f^{(4k)}(x) = 3^{4k}\sin(3x)$

alors

$f^{(4k+1)}(x) = 3^{4k+1}\cos(3x)$

$f^{(4k+2)}(x) = -3^{4k+2}\sin(3x)$

$f^{(4k+3)}(x) = -3^{4k+3}\cos(3x)$

donc $|f^{(p)}(x)| \leq 3^p$ $\forall p \in \mathbb{N}$
$\forall x \in [0, \pi]$

b2) Comme $x, x_i \in [0, \pi]$ alors $|x - x_i| \leq \pi$

Alors $|x-x_1| \cdot |x-x_2| \ldots |x-x_n| \leq \pi^{n+1}$ $\forall x \in [0, \pi]$

b3) Un resultat du cours nous dit

$$|E_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|$$

avec $M_{n+1} = \max_{0 \leq x \leq \pi} \underbrace{|f^{(n+1)}(x)|}_{\leq 3^{n+1}}$

donc $M_{n+1} \leq 3^{n+1}$

D'autre part, de b2) $\Rightarrow$ $\left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \leq \pi^{n+1}$

Alors

$$|E_n(x)| \leq \frac{3^{n+1} \pi^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(3\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On sait que $\frac{(3\pi)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{si\ n \to \infty} 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3\pi)^{n+1}}{(n+1)!} = e^{3\pi} - 1$

(car terme general de la serie

ce qui prove le resultat.

<u>Exercice 3.</u>

a) $A = M - N$ nous donne $M = A + N$

Alors $M_{ij} = \begin{cases} 2+\beta & si\ i = j \\ -1 & si\ |i-j| = 1 \\ 0 & si\ |i-j| > 1 \end{cases}$

$$M = \begin{pmatrix} 2+\beta & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2+\beta \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que M est à diagonale strictement dominante

car M_{ij} $\forall i = 1 \ldots n$ $|M_{ii}| = 2 + \beta > \sum_{j \neq i} |M_{ij}| = \begin{cases} 1 & si\ i = 1\ ou\ n \\ 2 & si\ i \in \{2 \ldots n \end{cases}$

b) $M^{-1} N x = \lambda x$. On multiplie à gauche par M

$\Rightarrow N x = \lambda M x$. ; faire produit scalaire par x $\Rightarrow$

$$\langle N x, x \rangle = \lambda \langle M x, x \rangle$$

c) $\langle Nx, x\rangle = x^* N x = (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)\begin{pmatrix} N_{11} x_1 \\ \vdots \\ N_{nn} x_n\end{pmatrix} =$

$= \sum_{i=1}^n N_{ii}\, x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n N_{ii} |x_i|^2$

$= \sum_{i=1}^n (\beta - \alpha_i)|x_i|^2 \in \mathbb{R}$

Alors
$|\langle Nx,x\rangle| \le \sum_{i=1}^n |\beta-\alpha_i|\,|x_i|^2 \le \max_{i\in[\![1,n]\!]} |\beta-\alpha_i| \, \|x\|^2$

d) $\langle Mx,x\rangle = \sum_{j=1}^n M_{ij}\, x_j \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{M_{ii}}_{=2+\beta}|x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{M_{i,i+1}}_{=-1} \bar{x}_i x_{i+1}$

$+ \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{M_{i+1,i}}_{=-1} x_i \bar{x}_{i+1} = (2+\beta)\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i\bar{x}_{i+1} + \bar{x}_i x_{i+1})$

Mais $\overline{x_i \bar{x}_{i+1}} = \bar{x}_i x_{i+1}$ donc $x_i\bar{x}_{i+1} + \bar{x}_i x_{i+1} = 2\,\mathrm{Re}(x_i \bar{x}_{i+1})$

Alors $\langle Mx,x\rangle = (2+\beta)\|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Re}(x_i\bar{x}_{i+1})$

e) De d) $\Rightarrow$ $\langle Mx,x\rangle = \beta\|x\|_2^2 + \underbrace{2\|x\|_2^2}_{=2|x_1|^2+2|x_2|^2+\dots 2|x_n|^2}$

$-2\sum_{i=1}^{n-1}\underbrace{\mathrm{Re}(x_i\bar{x}_{i+1})}_{\le |x_i|\cdot|x_{i+1}|}$

donc

$\langle Mx,x\rangle \ge \beta\|x\|_2^2 + \cancel{2|x_1|^2+2|x_2|^2+\dots+2|x_n|^2}$ $+ \underbrace{|x_2|^2 - 2|x_2||x_3| + |x_3|^2}_{\ge 0} + \dots$ etc

$+ |x_1|^2 + \underbrace{|x_1|^2 - 2|x_1||x_2| + |x_2|^2}_{\ge 0} + \dots$

donc $\ge \beta\|x\|_2^2$

f) De b) on déduit
$|\lambda| = \frac{|\langle Nx,x\rangle|}{|\langle Mx,x\rangle|} = \frac{|\langle Nx,x\rangle|}{\langle Mx,x\rangle} \overset{\text{de c) et e)}}{\le} \frac{\max_i|\beta-\alpha_i|\,\|x\|^2}{\beta\|x\|^2}$

ok! car $\forall \lambda\in Sp(M^{-1}N)$

donc $|\lambda| \le \frac{1}{\beta}\max_i|\beta-\alpha_i|$

g) Il faut montrer : $\frac{|\beta-\alpha_i|}{\beta}<1$ $\forall i$ $\Leftrightarrow$ ~~donc~~ $\left|1-\frac{\alpha_i}{\beta}\right|<1$ $\forall i$ donc

$-1 < \underbrace{1-\frac{\alpha_i}{\beta}}_{\text{ok!}} < 1$ $\forall i$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\alpha_i}{\beta}<2$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\alpha_i}{2}<\beta$

ok! si $\beta > \frac{\alpha_i}{2}$ $\forall i=1\dots n$.