Polytech Lyon, MAM3A, 2018-2019

Analyse Numérique (AN)

Examen - janvier 2019

Durée 2h - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

a) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \beta < \frac{1}{2}$ telle que la formule simple de quadrature

$$\int_0^1 g(x)\,dx \sim \alpha \left[g\left(\frac{1}{2}+\beta\right) + g\left(\frac{1}{2}-\beta\right) \right] \tag{1}$$

soit d'ordre au moins 2.

Montrer qu'en fait cette formule est d'ordre 3.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et posons

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

On considère la discrétisation suivante de $[a,b]$:

$$a_i = a + ih,\ i \in [[0,n]] \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{assez grand.}$$

En suivant le cours, écrire la formule composée pour approcher numériquement l'intégrale $I(f)$, formule qui correspond à la discrétisation $\{a_i,\ i = 0, \cdots n\}$ de $[a,b]$ et à la formule simple (1).

Exercice 2.

On considére le problème de Cauchy: trouver $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $x = x(t)$ satisfaisant l'EDO scalaire:

$$x' = 2x + t + 1, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

avec donnée initiale

$$x(0) = -1. \tag{3}$$

a) Donner la solution du problème (2) - (3).

b) On se propose de donner une approximation numérique de la solution de (2) - (3) sur l'intervalle $t \in [0,1]$. On considère la discrétisation suivante de $[0,1]$:

$$t_n = nh,\ \ n \in [[0,N]] \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

On supposera dans la suite de l'exercice $N = 10$. Determiner l' approximation x_1 de $x(t_1)$ obtenue par :

(i) la méthode d'Euler explicite

(ii) la méthode de Taylor d'ordre 2.

Exercice 3.
(*convergence globale partielle*)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine de f (donc $f(\alpha) = 0$) qui a la propriété suivante: les trois fonctions f, f' et f'' sont toutes non nulles sur l'intervalle $]\alpha, +\infty[$ et ont le même signe sur cet intervalle (donc soit elles sont toutes les trois strictement positive, soit elles sont strictement négatives).
On considère la suite (x_k) réelles définie par la méthode récursive de Newton:

$$\begin{cases} x_0 \;>\; \alpha \quad \text{donné} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $x_p > \alpha$. Montrer que x_{p+1} est bien défini et qu'il existe c_p avec $\alpha < c_p < x_p$ tel que

$$x_{p+1} - \alpha = \frac{(x_p - \alpha)^2 f''(c_p)}{2f'(x_p)}.$$

En déduire que la suite (x_k) est bien définie et qu'on a

$$x_k > \alpha, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

b) Montrer que que la suite (x_k) est strictement décroissante et en déduire le résultat suivant:

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha.$$

c) Supposons qu'on a en plus $f'(\alpha) \neq 0$. Que peut-on dire de l'ordre de convergence de x_k vers α?
d) Application Supposons que f est un polynôme de degré n (avec $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$) ayant n racines réelles distinctes et notons par α la racine la plus grande. Montrer que toutes les hypothèses de l'exercice sont satisfaites. Considérons la suite (x_k) donné par (4). Que peut-on dire de la convergence de cette suite?