Polytech Lyon, MAM3A, 2018-2019

Analyse Numérique (AN)

Partiel 2 - novembre 2018

Durée 1h et 15min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Soit $b \in \mathbb{R}^3$ donné par $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre le système algébrique linéaire $Ax = b$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Montrer qu'il existe la décomposition $A = LU$ où $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale et $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure. Trouver L et U.

Exercice 2.

Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \sin(3x), \quad \forall\, x \in [0, \pi].$$

a) Construire le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points $y_0 = 0,\ y_1 = \frac{\pi}{2}$ et $y_2 = \pi$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ on considère la division suivante sur $[0, \pi]$: on pose $h = \frac{\pi}{n}$ et ensuite $x_j = j\,h,\ j \in [[0, n]]$.

On considère alors P_n le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \cdots x_n$.

On pose $E_n(x) = P_n(x) - f(x)$ (l'erreur d'interpolation) et on se propose de montrer que

$$\sup_{x \in [0,\pi]} |E_n(x)| \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to +\infty.$$

b1) Montrer qu'on a

$$|f^{(n)}(x)| \leq 3^n, \quad \forall\, x \in [0, \pi].$$

b2) Majorer par une constante indépendante de $x \in [0, \pi]$ l'expression

$$|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|.$$

b3) Montrer le résultat attendu.

Exercice 3.

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ le nombre réel $Re(z)$ désigne la partie réele du z et qu'on a en plus $z + \bar{z} = 2Re(z)$.

On se donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et des nombre réels et strictement positives $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ et β. On considère la matrice tridiagonale $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$A_{ij} = \begin{cases} 2+\alpha_i & \text{si} \quad i = j \\ -1 & \text{si} \quad |i-j| = 1 \\ 0 & \text{si} \quad |i-j| > 1 \end{cases}$$

On pose $A = M - N$, avec $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où N est la matrice diagonale donnée par

$$N = diag(\beta - \alpha_1, \beta - \alpha_2, \cdots \beta - \alpha_n).$$

On se propose de montrer que sous certaines conditions on a

$$\rho(M^{-1}\,N) < 1$$

ce qui va assurer la convergence de la méthode itérative associée à cette décomposition de A.

a) Trouver la matrice M et montrer qu'elle est inversible (on pourrait montrer que M est à diagonale strictement dominante).

b) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre arbitraire de $M^{-1}N$ et $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)^T \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre correspondant, avec x non nul. Montrer qu'on a

$$< N\,x\,, x > = \ \lambda < M\,x\,,\, x >$$

(on utilise ici le produit scalaire en $\mathbb{C}^n$).

c) Montrer que $< N\,x\,, x >$ est un nombre réel et qu'on a

$$| < N\,x\,, x > | \leq \left(\max_{i \in [[1,n]]} |\beta - \alpha_i| \right) \|x\|_2^2$$

d) Montrer que

$$< M\,x\,,\, x > = (2+\beta)\|x\|_2^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} Re(x_i \overline{x_{i+1}}).$$

e) En déduire que $< M\,x\,, x >$ est un nombre réel et qu'on a

$$< M\,x\,,\, x > \ \geq \beta \|x\|_2^2$$

(*Indication: utiler le fait que pour tout nombre complexe z on a $Re(z) \leq |z|$.*

f) *En utilisant* **b)**, **c)** *et* **e)** *montrer que*

$$\rho(M^{-1}N) \leq \frac{1}{\beta} \max_{i \in [[1,n]]} |\beta - \alpha_i|.$$

g) *En déduire que si $\beta > \frac{\bar{\alpha}}{2}$ avec $\bar{\alpha} = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n\}$ alors on a*

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$