Corrigé Exam AN, MAM3A, 2019 - 2020

Exo 1.

a) On sait du cours

$\mu_k = \int_{-1}^{1} L_k(x)\,dx \quad , k = 0, 1, 2$

où L_k sont les polynomes fondamentaux de Lagrange pour les points ~~$-\alpha, 0, \alpha$~~. $x_0 = -\alpha$; $x_1 = 0$, $x_2 = \alpha$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x(x-\alpha)}{-\alpha(-2\alpha)} = \frac{x(x-\alpha)}{2\alpha^2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x+\alpha)(x-\alpha)}{\alpha(-\alpha)} = -\frac{x^2-\alpha^2}{\alpha^2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x+\alpha)\,x}{2\alpha\cdot\alpha} = \frac{x(x+\alpha)}{2\alpha^2}$$

$$\mu_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2\alpha^2}dx - \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{x}{2\alpha}\,dx}_{=0} = \frac{1}{2\alpha^2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3\alpha^2}$$

$$\mu_1 = 1\int_{-1}^{1} - \frac{1}{\alpha^2}\int_{-1}^{1} x^2 = 2 - \frac{2}{3\alpha^2}$$

$$\mu_2 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2\alpha^2} + \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\alpha x}{2\alpha}}_{=0} = \frac{1}{2\alpha^2}\,\frac{2}{3} = \frac{1}{3\alpha^2}$$

~~b)~~ Donc $\mu_0 = \frac{1}{3\alpha^2}$; $\mu_1 = 2 - \frac{2}{3\alpha^2}$, $\mu_2 = \frac{1}{3\alpha^2}$

alors ordre ~~au~~ moins 2.

b) ~~Pour que~~ Il faut ordre au moins 3, c'est à dire

$I(x^3) = I_2(x^3) \iff$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^3 dx}_{=0} = \underbrace{\frac{1}{3\alpha^2}(-\alpha)^3 + 0 + \frac{1}{3\alpha^2}\alpha^3}_{=0}$$ toujours vrai

Il faut ensuite ordre au moins 4, c'est à dire

$I(x^4) = I_2(x^4) \iff$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^4 dx}_{=\frac{2}{5}} = \frac{1}{3\alpha^2}(-\alpha)^4 + 0 + \frac{1}{3\alpha^2}\alpha^4$$

$\iff \frac{2}{5} = \frac{2}{3\alpha^2}\alpha^4 \iff \frac{1}{5} = \frac{\alpha^2}{3} \iff \alpha^2 = \frac{3}{5} \iff \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ car $\alpha > 0$

Il faut ordre ~~≥~~ au moins 5 c'est à dire

$I(x^5) = I_2(x^5) \iff$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^5 dx}_{=0} = \underbrace{\frac{1}{3\alpha^2}(-\alpha)^5 + 0 + \frac{1}{3\alpha^2}(\alpha)^5}_{=0}$$

toujours vrai

Montrons que l'ordre est 5, c'est à dire

$I(x^6) \neq I_2(x^6) \iff$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^6 dx}_{=\frac{2}{7}} \neq \underbrace{\frac{1}{3\alpha^2}(-\alpha)^6 + 0 + \frac{1}{3\alpha^2}\alpha^6}_{= \frac{2}{3}\alpha^4 = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{25} = \frac{6}{25}}$$

$\frac{2}{7} \neq \frac{6}{25}$

Donc pour $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ l'ordre du (1) est égal à 5.

Exercice 5

a) $y' = y + 1$ et $y(0) = 1$

c'est une ODE scalaire linéaire.

La solution est

$$y(t) = e^{1(t-0)} \cdot 1 + \int_0^t e^{1\cdot(t-s)} \cdot 1 \, ds$$

$$= e^t + e^t \underbrace{\int_0^t e^{-s} ds}_{= \left[\frac{e^{-s}}{-1}\right]_0^t = -e^{-t} + 1}$$

donc $y(t) = e^t - 1 + e^t = 2e^t - 1$

~~On peut~~ Remarque : on peut aussi faire par séparation des variables : $\frac{y'}{y+1} = 1 \iff \frac{d}{dt}\ln(|y+1|) = \frac{d}{dt} t$

$\iff \ln(|y+1|) = t + c$

$\iff |y+1| = e^c e^t \iff y+1 = \pm e^c e^t$

$\iff y+1 = ke^t \iff y = ke^t - 1$

$y(0) = 1 \iff k - 1 = 2 \iff k = 2$

donc $y(t) = 2e^t - 1$

b) $y' = y^2+1$; ~~on a~~ $\Leftrightarrow$

(car $y^2+1>0$ $\forall t$)

$\frac{y'}{y^2+1} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}(y) = \cancel{t+c}\ \frac{d}{dt}(t+c)$

$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}(y(t)) = t+c$

Alors $y(t) = \operatorname{tg}(t+c)$

$y(0)=1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} c = 1$ donc $c = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

$y(t) = \operatorname{tg}(t+\frac{\pi}{4}+k\pi)$, $\cancel{k\in\mathbb{Z}}$ $= \operatorname{tg}(t+\frac{\pi}{4})$ (la fonction tg est périodique de période π)

Il faut que $t+\frac{\pi}{4}$ soit dans un intervalle de la forme $-\frac{\pi}{2}+l\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$

$-\frac{\pi}{2}+l\pi < t+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}+l\pi \Leftrightarrow$

~~$-\frac{3\pi}{4} + (l-k)\pi < t < \frac{\pi}{4} + (l-k)\pi$, $l-k\in\mathbb{Z}$~~

~~$t=0$ c'est $]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ le seul intervalle qui contient qui correspond à $l=k$.~~

$-\frac{3\pi}{4} + l\pi < t < \frac{\pi}{4} + l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$.

$-\frac{3\pi}{4}+l\pi < t < \frac{\pi}{4}+l\pi$; le seul intervalle de ce type qui contient 0 $t=0$ est $]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ qui correspond à $l=0$

Donc $y(t) = \operatorname{tg}(t+\frac{\pi}{4})$, $t\in J =]-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

Exercice 3.

a) c'est immédiat d'un théorème de cours
Comme $f\in C^1 \Rightarrow y\in C^2$

b) Le schéma s'écrit
$$y^{(n+1)} = y^{(n)} + h\,\phi(t_n, y^{(n)}, h_n)$$
avec
$$\phi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f(t+h, y+h f(t,y))\right]$$
Comme f est continue alors ϕ est continue

$\phi(t,y,0) = \frac{1}{2}[f(t,y) + f(t+0, y+0)] = f(t,y)$

Par un résultat du cours $\rightarrow$ schéma consistant.

c) Montrons : $\|\phi(t,u,h)-\phi(t,v,h)\| \le L_1 \|u-v\|$

avec $L_1 \geq 0$ const. si $\|h\| \le 1$ $\quad \forall\, u,v \in \mathbb{R}^d$

$\forall\, t \in [0,T]$

$\|\phi(t,u,h)-\phi(t,v,h)\| =$

$= \frac{1}{2} \| f(t,u) - f(t,v) + f(t+h, u + hf(t,u)) - f(t+h, v+hf(t,v))\|$

$\le \frac{1}{2} \| f(t,u)-f(t,v)\| + \frac{1}{2} \|f(t+h, u+hf(t,u))-f(t+h, v+hf(t,v))\|$

$\le \frac{1}{2} L \|u-v\| + \frac{1}{2} L \|\underbrace{u+hf(t,u) - v - hf(t,v)}_{=u-v+h(f(t,u)-f(t,v))}\|$

$\le \frac{1}{2} L\|u-v\| + \frac{1}{2} L \left[\|u-v\| + \underbrace{\|h\|}_{\le 1} \underbrace{\|f(t,u) - f(t,v)\|}_{\le L\|u-v\|}\right]$

$\le \frac{1}{2} L\|u-v\| + \frac{1}{2} L (1+L) \|u-v\|$

$= \underbrace{\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} L(1+L)}_{=L_1} \|u-v\|.$

d) $y^{(0)} = a = 0$

$h = \frac{1}{10} = 0{,}1$

$f(t_0, y^{(0)}) = y^{(0)} + 2t_0 = 0 + 0 = 0$

$y^{(1)} = \underbrace{y^0}_{=0} + \frac{0{,}1}{2} \Big[\underbrace{f(t_0, y^{(0)})}_{=0} + \underbrace{f(t_1, \underbrace{y^0}_{=0} + 0{,}1\, \underbrace{f(t_0, y^{(0)})}_{=0})}_{=2t_1 = 2h = 0{,}2} \Big]$

$y^{(1)} = \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}2 = 0{,}01.$

Exercice 4.

a) $x_{k+1} = x_k - a x_k^2 + x_k^2 \varepsilon(x_k)$

D'un coté on va ~~prendre~~ chercher à avoir

$-a x_k^2 + x_k^2 \varepsilon(x_k) < 0$

~~On considère la fonction~~
~~$g(x) = -a x^2 + x^2 \varepsilon(x)$~~

donc $x_k^2 \left[-a + \varepsilon(x_k)\right] < 0$

Comme $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ alors il existe $h_1 > 0$ t.q si $x \in]0, h_1[$.

(1)' $-a + \varepsilon(x) < 0$

D'autre coté on cherche à avoir

$x_k - a x_k^2 + x_k^2 \varepsilon(x_k) > 0$

donc $x_k(1 - a x_k + x_k \varepsilon(x_k)) > 0$

Comme $\lim_{x \to 0} (1 - ax + x\varepsilon(x)) = 1$ alors il existe $h_2 > 0$ tel que

(2)' $1 - ax + x\varepsilon(x) > 0 \quad \forall x \in]0, h_2[$

On va prendre $h = \min\{h_1, h_2\} > 0$

~~Montrons~~ On suppose $x_0 \in]0, h[$.

Montrons par reccurence $x_k \in]0, h[\quad \forall k \in \mathbb{N}$!

- Pour $k = 0$ OK par hypothèse
- ~~Pour~~ Si ~~$x_k \in$~~ $0 < x_k < h$ alors $0 < x_k < h_2$ donc

et de (2)' $\Rightarrow$ $1 - a x_k + x_k \varepsilon(x_k) > 0$

$$\underbrace{x_k\left[1 - a x_k + x_k \varepsilon(x_k)\right]}_{= x_{k+1}} > 0$$

donc $x_{k+1} > 0$

D'autre part comme $0 < x_k < h$ alors $0 < x_k < h_1$, donc

et de (1)' $\to$ $-a + \varepsilon(x_k) < 0$

$$\underbrace{x_k^2(-a + \varepsilon(x_k))}_{= x_{k+1} - x_k} < 0$$

donc $x_{k+1} < x_k < h$

~~a2~~ a2) On reprend la dernière partie de a)

ce qui donne $x_{k+1} < x_k$

donc suite strictement décroissante

a3) On a une suite ~~st~~ décroissante et bornée inférieurement (par 0)

Alors la suite est convergente

$x_k \to \ell$ avec $\ell \in [0, h[$

En passant à la limite en (7) $\Rightarrow$

$\ell = f(\ell)$ c'est à dire

$\cancel{\ell} = \cancel{\ell} - a\ell^2 + \ell^2 \varepsilon(\ell)$

$\Leftrightarrow$

$\ell^2 [-a + \varepsilon(\ell)] = 0$

Comme $\ell \in]0, h_1[$ alors de $(1)'$ $\Rightarrow$

$-a + \varepsilon(\ell) < 0$

Ceci donne $\ell = 0$

b)

~~b1) $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} = \frac{1}{}$~~