Corrigé Partiel 1 AN 2019-2020

Exo 1.

a) $\frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha u_0$

ce qui donne

$u_1 - u_0 = \alpha h u_0$ donc

$u_1 = u_0(1+\alpha h)$

Comme $1+\alpha h > 0$ (car $\alpha, h > 0$) alors

(1)' $u_0 = \frac{1}{1+\alpha h} u_1$

~~Ex~~ b) On approche (1) en x_i, $i = 1 \dots N$.

$-\frac{u_{i-1} - 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$, $i = 1 \dots N$

Pour $i = 1$ on a

$-u_0 + 2u_1 - u_2 = h^2 f(x_1)$

~~ce qui~~ et en utilisant (1)' on obtient

$\left(2 - \frac{1}{1+\alpha h}\right) u_1 - u_2 = h^2 f(x_1)$

Pour i de 2 à $N-1$ on a

$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f(x_i)$

Pour $i = N$ on a (on utilise $u_{N+1} = 1$)

$-u_{N-1} + 2u_N - 1 = h^2 f(x_N)$

donc

$-u_{N-1} + 2u_N = h^2 f(x_N) + 1$

On a alors le système algébrique linéaire

N équations avec N inconnues : $u_1, u_2 \dots u_N$:

$$\begin{cases} \left(2-\frac{1}{1+\alpha h}\right)u_1 - u_2 = b_1 \\ -u_{i-1}+2u_i-u_{i+1} = b_i \,, \quad i=2 \dots N-1 \\ -u_{N-1}+2u_N = b_N \end{cases}$$

avec $\begin{cases} b_i = h^2 f(x_i)\,, \quad i=1 \dots N-1 \\ b_N = h^2 f(x_N)+1 \end{cases}$

On écrit ce système sous la forme matricielle

$AU = b$ et

avec $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2-\frac{1}{1+\alpha h} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{cases} 2-\frac{1}{1+\alpha h} & \text{si } i=j=1 \\ 2 & \text{si } i=j\neq 1 \\ -1 & \text{si } |i-j|=1 \\ 0 & \text{si } |i-j|>1 \end{cases}$$

c) Il est facile de voir que A est réelle et symétrique
Montrons que A est définie positive ;
soit $Y \in \mathbb{R}^N$ arbitraire, $\neq 0$ alors

$$\langle AY, Y\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij}\,y_i y_j = \sum_{i=1}^{N} A_{ii}\,y_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le N} A_{ij}\,y_i y_j$$

$$= \left(2-\frac{1}{1+\alpha h}\right)y_1^2 + 2\sum_{i=2}^{N} y_i^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3 - \dots - 2y_{N-1}y_N$$

$$= y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 + y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2 + \dots \; y_{N-1} - 2y_{N-1}y_N + y_N^2$$

$$+ \left(1-\frac{1}{1+\alpha h}\right)y_1^2 + y_N^2$$

donc

$$\langle AY, Y\rangle = (Y_1-Y_2)^2 + \cdots + (Y_{N-1}-Y_N)^2 + \frac{\alpha h}{1+\alpha h} Y_1^2 + Y_N^2$$

Il est evident que $\langle AY, Y\rangle \geq 0 \quad \forall Y \in \mathbb{R}^N$

En plus si $\langle AY, Y\rangle = 0$ alors

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 - Y_2 = 0 \\ Y_2 - Y_3 = 0 \\ \vdots \\ Y_{N-1} - Y_N = 0 \\ Y_1 = 0 \\ Y_N = 0 \end{array}\right\}$$

et ceci donne $Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_N = 0$ d'où le résultat attendu.

Exo 2.

i) Montrons d'abord

$$\|A\|_p \leq \max_{j\in[[1,n]]} |A_{jj}|$$

Soit $x \in \mathbb{C}^n$ ~~arbitraire~~ avec $\|x\|_p = 1$ donc $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = 1$.

On a : $Ax = \begin{pmatrix} A_{11}x_1 \\ A_{22}x_2 \\ \vdots \\ A_{nn}x_n \end{pmatrix}$ car A est diagonale

et $\|Ax\|_p = \cancel{\left(\sum_{k=1}^p |A_{kk}|^p |x_k|\right)^{1/p}} = \left(\sum_{i=1}^n \underbrace{|A_{ii}|^p}_{\leq (\max_j |A_{jj}|)^p} |x_i|^p\right)^{1/p}$

$$\leq \left[(\max_j |A_{jj}|)^p \underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{=1}\right]^{1/p} \leq \max_{j\in[[1,n]]} |A_{jj}|$$

On passe au $\sup_{x\in\mathbb{C}^n, \|x\|_p=1}$ ce qui donne

$$\|A\|_p \equiv \sup_{x\in\mathbb{C}^n, \|x\|_p=1} \|Ax\| \leq \max_{j\in[[1,n]]} |A_{jj}|$$

ii) Montrons $\|A\|_p \geq \max_{j\in[[1,n]]} |A_{jj}|$

Soit $j_0 \in [[1,n]]$ tel que $\max_{j\in[[1,n]]} |A_{jj}| = |A_{j_0j_0}|$

Soit $Y = e_{j_0}$. Alors $AY = Ae_{j_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_{j_0j_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_{j_0j_0} e_{j_0}$

$\|AY\|_p = \left(|A_{j_0j_0}|^p\right)^{1/p} = |A_{j_0j_0}|$; Notons que $\|Y\|_p = \|e_{j_0}\| = 1$.

Alors $\|A\|_p = \sup_{x\in\mathbb{C}^n : \|x\|_p=1} \|Ax\| \geq \|Ae_{j_0}\| = |A_{j_0j_0}| = \max_{j\in[[1,n]]} |A_{jj}|$

ce qui finit la preuve.

Exo 3.

a) $\|AB\|_t = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |(AB)_{ij}| =$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \cdot |B_{kj}|$

D'autre part

$\|A\|_t \, \|B\|_t = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \right) \left(\sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n |B_{\ell j}| \right)$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ik}| \, |B_{\ell j}|$

Remarquons que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on a

(2)' $\sum_{k=1}^n |A_{ik}| \cdot |B_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n |A_{ik}| \, |B_{\ell j}|$

(car les n termes à gauche sont parmi les n^2 termes à droite et on a que des termes ≥ 0)

On somme (2)' sur (i,j) et on obtient l'inégalité souhaitée

b) On prend $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$

$\left(A_{ij} = B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right)$

~~Alors AB =~~ Alors il est facile de voir que

$AB = A = B$.

On a : ~~$\|AB\|$~~ $\|A\|_t = \|B\|_t = \|AB\|_t = 1$

et l'inégalité $1 \leq \alpha \cdot 1 \cdot 1$ est impossible avec $\alpha \in [0,1[$