Corrigé Partiel 2 AN 2019-2020

Exo 1.

On écrit
$$A = D - E - F$$ avec

$D = \text{diag}(2,2,2) = 2 I_3$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On introduit la matrice de Gauss-Seidel
$$G = (D-E)^{-1} F$$
et on se propose de calculer G et $\rho(G)$

$$D - E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{matrice inversible}$$

$G = \cancel{\rho}(D-E)^{-1} F = \left((D-E)^{-1} F_1,\ (D-E)^{-1} F_2 ;\ (D-E)^{-1} F_3\right)$

où F_1, F_2, F_3 sont les 3 colonnes respectives de F

Comme $F_1 = 0$ alors $(D-E)^{-1} F_1 = 0$.

$(D-E)^{-1} F_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} 2x = -1 \\ -x + 2y = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$

donc $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{4}$; $z = -\frac{1}{8}$

donc $(D-E)^{-1} F_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

$(D-E)^{-1} F_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} 2x = 0 \\ -x + 2y = 1 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$

donc $x = 0$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{4}$

~~D-E~~ donc $(D-E)^{-1} F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Alors $G = (D-E)^{-1} F = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & -1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$

Calculons les valeurs propres de G :

$$P_G(\lambda) = \det(G - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1/2 & 0 \\ 0 & -\lambda-1/4 & 1/2 \\ 0 & -1/8 & -\lambda+1/4 \end{vmatrix} =$$

dev. colonne 1

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda-1/4 & 1/2 \\ -1/8 & -\lambda+1/4 \end{vmatrix} = (-\lambda)\left(\lambda^2 - \cancel{\frac{1}{16}} + \frac{1}{16}\right) = -\lambda^3$$

Alors la seule valeur propre est $\lambda = 0$

$\rho(G) = 0 < 1$; la méthode est convergente.

Exo 2.

a) $P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

$f(x_0) = e^3$; $\quad f[x_0, x_1] = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1 - e^3$

$f(x_1) = 1$

$f(x_2) = e^{-3}$ $\quad f[x_1, x_2] = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{e^{-3} - 1}{1 - 0} = e^{-3} - 1$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{e^{-3} - 1 - 1 + e^3}{2} = \frac{e^3 + e^{-3}}{2} - 1$$

Alors $P_2(x) = e^3 + (1 - e^3)(x+1) + \left(\dfrac{e^3 + e^{-3}}{2} - 1\right)(x+1)x$.

b1) $f'(x) = -3e^{-3x}$

$f''(x) = (-3)^2 e^{-3x}$

par récurrence on montre facilement $f^{(k)}(x) = (-3)^k e^{-3x}$ $\forall k \in \mathbb{N}$

donc $f^{(n+1)}(x) = (-3)^{n+1} e^{-3x}$

$|f^{(n)}(x)| \le 3^{n+1} e^{-3\cdot(-1)} = e^3 3^{n+1}$

(car la fonction $x \longrightarrow e^{-3x}$ est décroissante)

b2) Comme $x, x_j \in [-1, 2]$ alors $\forall j = 0, 1 \dots n$

$|x - x_j| \le 3$

(car $-1 \le x \le 2$
$-2 \le -x_j \le 1$ somme $\Rightarrow$ $-3 \le x - x_j \le 3$)

Alors

$$|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \le 3^{n+1}$$

b3) D'apres un resultat du cours on a

$$\cancel{|f(x) - P_n(x)|}$$
$$|E_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x-x_0)\dots(x-x_n)|, \quad \forall x \in [-1,2].$$

avec $|M_{n+1}| = \max_{x\in[-1,2]} |f^{(n+1)}(x)| \le e^3 3^{n+1}$

Avec le resultat de b2) on a

$$|E_n(x)| \le \frac{e^3 . 3^{n+1} . 3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^3 9^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [-1,2]$$

On passe au "sup" en x :

$$\sup_{x\in[-1,2]} |E_n(x)| \le e^3 \frac{9^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall a > 0$

(car c'est le terme general de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = e^a - 1$ convergente, donc $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$!)

Donc $\sup_{x\in[-1,2]} |E_n(x)| \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$.

Exo 3:

a) Si $n=1$ alors $A \in \mathbb{C}$: A est (HDP) $\Rightarrow A \in \mathbb{R}$ et $A>0$: On a $A = R^* R$ avec $R = \sqrt{A} > 0$ OK!

b) Comme M est triang sup ~~alors~~ en $M_{n-1}(\mathbb{C})$ alors $\begin{pmatrix} M & \beta \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est triang sup en $M_n(\mathbb{C})$

les elem diag. de $\begin{pmatrix} M & \beta \\ 0 & d \end{pmatrix}$ sont les élèm diagonaux de M et d, donc ils sont reélls ~~et~~ et ~~...~~ > 0.

En posant $R = \begin{pmatrix} M & \beta \\ 0 & d \end{pmatrix}$ alors $R^* = \begin{pmatrix} M^* & 0 \\ \beta^* & d \end{pmatrix}$

et donc on a le resultat attendu.

c) En faisant multiplication par blocs on a

$\begin{pmatrix} M^* & 0 \\ \beta^* & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & \beta \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^*M & M^*\beta \\ \beta^*M & \beta^*\beta + d^2 \end{pmatrix}$ et ça doit être

égal à $\begin{pmatrix} B & \alpha \\ \alpha^* & c \end{pmatrix}$

Alors la factorisation (i) existe s'il existe :

$M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ avec les propriétés demandés, $\beta \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $d \in \mathbb{R}$

tels que

(i) $M^* M = B$

(ii) $M^* \beta = \alpha$

(iii) $\beta^* M = \alpha^*$

(iv) $\beta^* \beta + d^2 = c$

Comme A est (HDP) alors B est aussi (HDP) en $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$

(B c'est une sous-matrice principale de A)

Alors par l'hypothese de récurrence on a $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$

avec les propriétés voulues t.q (i) soit vraie

Comme M^* est inversible alors (ii) est vraie avec

$\beta = (M^*)^{-1}\alpha$.

(iii) est equivalente à (ii) ~~par~~ (appliquer * à (ii))

~~Alors~~ Pour (iv) on a $\beta^*\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta^*\beta \geq 0$

Donc on peut prendre $d = \sqrt{c - \beta^*\beta} > 0$

à condition d'avoir $c \in \mathbb{R}$ et $c > \beta^*\beta$

Mais $\beta^*\beta = \alpha^*\left((M^*)^{-1}\right)^*(M^*)^{-1}\alpha = \cancel{\alpha^*(M M^*)^{-1}\alpha =}$

$= \alpha^* M^{-1}(M^*)^{-1}\alpha = \alpha^*(M^*M)^{-1}\alpha = \alpha^* B^{-1}\alpha$.

Ceci demontre c).

d) On a $e_n^* A e_n \in \mathbb{R}$ et $e_n^* A e_n > 0$

Mais $e_n^* A e_n = c$ donc $c \in \mathbb{R}$ (en plus $c > 0$)

Le fait que $(x^* \ \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} > 0$ $\forall x \in \mathbb{C}^{n-1}$

est évident, car $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$.

Si on multiplie par blocs on a

$$(x^* \ \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = (x^* \ \ 1) \begin{pmatrix} B & \alpha \\ \alpha^* & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^* B + \alpha^* & x^* \alpha + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = x^* B x + \alpha^* x + x^* \alpha + c$$

Prendre $x = -B^{-1} \alpha$

Alors

$$(x^* \ \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha^* \underbrace{(B^{-1})^*}_{= B^{-1} \text{ car } B \text{ est (HDP)}} \underbrace{B B^{-1}}_{= I_n} \alpha - \alpha^* B^{-1} \alpha - \alpha^* \underbrace{(B^{-1})^*}_{= B^{-1} \text{ car } B \text{ est (HDP)}} \alpha + c$$

$$= c - \alpha^* B^{-1} \alpha$$

Comme $(x^* \ \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} > 0$ alors

$c > \alpha^* B^{-1} \alpha$.