**Polytech Lyon,** MAM3A, 2019-2020

**Analyse Numérique (AN), Examen janvier 2020**

*Durée 2h - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée*

**Exercice 1.**

Pour toute fonction continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ on note $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. On considère la formule simple de quadrature suivante pour approcher $I(f)$:

$$I_2(f) = \mu_0 f(-\alpha) + \mu_1 f(0) + \mu_2 f(\alpha) \tag{1}$$

avec $\alpha \in ]0,1]$.

**a)** Trouver $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ en fonction de $\alpha$ tels que (1) soit d'ordre au moins 2.

**b)** En déduire qu'on peut trouver $\alpha \in ]0,1]$ et $\mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tels que (1) soit d'ordre 5.

**Exercice 2.**

On considére l'équation différentielle scalaire: trouver $J \subset \mathbb{R}$ l'intervalle ouvert maximal d'existence et $y : J \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, $y = y(t)$ satisfaisant l'EDO scalaire:

$$y'(t) = y^{\alpha}(t) + 1, \quad t \in I \tag{2}$$

avec condition initiale

$$y(0) = 1. \tag{3}$$

Donner la solution du problème (2) - (3) dans les cas suivants:

**a)** $\alpha = 1$

**b)** $\alpha = 2$.

**Exercice 3.**

On se donne $d \in \mathbb{N}^*$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert avec $0 \in I$, $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe $C^1$ et $a \in \mathbb{R}^d$.

Nous considérons le problème de Cauchy suivant: trouver $y : I \to \mathbb{R}^d$ de classe $C^1$ solution du système EDO

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I \tag{4}$$

avec condition initiale

$$y(0) = a. \tag{5}$$

On suppose en plus qu'il existe $L \geq 0$ tel que

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall\, t \in I,\ \forall\, u, v \in \mathbb{R}^d.$$

On propose dans la suite un schéma numérique pour trouver une approximation numérique de la solution de (4) - (5) sur l'intervalle $[0,T]$ où $T > 0$, $T \in I$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ assez grand on pose $h = \frac{T}{N}$, $t_n = nh$ où $n \in [[0,N]]$ et on introduit les valeurs $y^{(0)}, y^{(1)}, \cdots y^{(N)} \in \mathbb{R}^d$ (où $y^{(n)}$ représente une approximation de $y(t_n)$) obtenues par la relation de récurrence:

$$\begin{cases} y^{(n+1)} = y^{(n)} + \frac{h}{2}[f(t_n, y^{(n)}) + f(t_{n+1}, y^{(n)} + hf(t_n, y^{(n)}))], \quad n = 0, 1 \cdots N-1 \\ y^{(0)} = a. \end{cases} \tag{6}$$

(c'est le **schéma de Heun**).

**a)** Montrer l'existence et l'unicité d'une solution $y$ du problème (4) - (5) sur $I$ (solution globale). Montrer en plus que $y \in C^2(I)$.

**b)** Montrer que le schéma (6) pour approcher (4) - (5) est consistant.

**c)** Montrer que le schéma (6) est stable.

**d)** On considère ici $d = 1,\ I = \mathbb{R}, a = 0, T = 1, N = 10$ et $f(t,x) = x + 2t,\ \forall\ (t,x) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $y^{(0)}$ et $y^{(1)}$ données par le schéma (6).

**Exercice 4.**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ telle que

$$f(0) = 0$$

(remarquer que 0 est à la fois racine et point fixe de $f$).

On considère la suite $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ des approximations successives obtenue par la relation de récurrence:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k), & \forall\ k \in \mathbb{N} \\ x_0 \in \mathbb{R} & \text{donné.} \end{cases} \tag{7}$$

On se propose d'étudier la convergence de cette suite dans le cas critique $f'(0) = 1$.

En fait on va supposer que $f$ admet le développement limité suivant autour de 0:

$$f(x) = x - ax^2 + x^2\,\epsilon(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

avec $a > 0$ et $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que si $x_0 \in ]0, h[$ alors

**a)** $x_k \in ]0, h[, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$

**b)** la suite $(x_k)$ est strictement décroissante

**c)** $x_k \to 0$ pour $k \to +\infty$.