Polytech Lyon, MAM3A, 2019-2020

Analyse Numérique (AN)

Partiel 1 - octobre 2019

Durée 1h et 10min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné dans $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On se donne aussi une fonction $f \in C(\bar{\Omega})$ et une constante $\alpha > 0$.
On considère l'q́uation différentielle suivante: trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisfaisant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega \tag{1}$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$u'(a) = \alpha u(a) \tag{2}$$

et

$$u(b) = 1 \tag{3}$$

(la condition limite (2) est une condition de **Robin**).
Dans la suite de l'exercice on va utiliser la méthode et les notations du cours pour construire une approximation du problème (1) - (2) - (3). On fixe $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$ assez grand, on pose $h = \frac{b-a}{N+1}$, on pose $x_i = a + ih$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots N+1\}$ et on note par U_i une approximation de $u(x_i)$.
Pour tout $i = 1, 2, \cdots N$ on approche $u''(x_i)$ en (1) par $\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$ et $u'(a)$ en (2) par $\frac{U_1 - U_0}{h}$. D'autre part, grâce à (3) nous prenons $U_{N+1} = 1$.

a) Ecrire une approximation de (2) comme une équation faisant intervenir U_0 et U_1 et montrer qu'on peut exprimer U_0 en fonction de U_1.
b) Ecrire un système algébrique linéaire d'inconnues $U_1, U_2, \cdots U_N$ qui approche le problème (1) - (2) - (3). Ecrire ce système sous la forme matricielle $AU = b$ avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ à préciser.
c) Montrer que A est une matrice symétrique et défine positive.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [1,\ +\infty[$ et considérons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la norme matricielle $\|\cdot\|_p$ subordonnée à la norme vectorielle notée toujours $\|\cdot\|_p$, définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \text{pour tout vecteur} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **diagonale**. Montrer qu'on a

$$\|A\|_p = \max_{j \in [[1,n]]} |A_{jj}|.$$

Indication: montrer une double inégalité.

Exercice 3.

Pour un $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire on munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme

$$\|A\|_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

(on admet que cette expression définie une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; attention, ce n'est pas forcément une norme subordonnée!).

a) Montrer qu'on a

$$\|AB\|_t \leq \|A\|_t \|B\|_t, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

b) Montrer que ce résultat n'est pas améliorable, au sense suivant: il n'existe pas $\alpha \in [0, 1[$ tel que

$$\|AB\|_t \leq \alpha \|A\|_t \|B\|_t, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(*Indication: construire un contre-exemple.*)