Polytech Lyon, MAM3A, 2019-2020

Analyse Numérique (AN)

Partiel 2 - novembre 2019

Durée 1h et 15min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Etudier la convergence de la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution des systèmes algébriques linéaires ayant A comme matrice des coefficients.

Exercice 2.

Soit $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = \exp(-3x), \quad \forall x \in [-1, 2].$$

a) Construire le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points $y_0 = -1$, $y_1 = 0$ et $y_1 = 1$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ on considère la division suivante sur $[-1, 2]$: on pose $h = \frac{3}{n}$ et ensuite $x_j = -1 + j\,h,\ j \in [[0, n]]$.

On considère alors P_n le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points $x_0, x_1, \cdots x_n$.

On pose $E_n(x) = P_n(x) - f(x)$ (l'erreur d'interpolation) et on se propose de montrer que

$$\sup_{x \in [-1,2]} |E_n(x)| \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to +\infty.$$

b1) Montrer qu'on a

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq 3^{n+1} e^3, \quad \forall x \in [-1, 2].$$

b2) Majorer par une constante indépendante de $x \in [-1, 2]$ (mais dépendante de n) l'expression

$$|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|.$$

b3) Montrer le résultat attendu.

Exercice 3.

On se propose de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec A hermitienne et définie positive (matrice (HDP)) admet la décomposition de Choleski: il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où R est une matrice triangulaire supérieure avec tous les éléments diagonaux réels et strictement positifs, telle que

$$A = R^* R.$$

a) Montrer que le résultat souhaité est vrai si $n = 1$.

Dans la suite on suppose que le résultat souhaité est vrai pour $n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et *on souhaite montrer qu'il est vrai pour* n. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *avec* A *matrice (HDP). Nous écrivons* A *par blocs sous la forme*

$$A = \begin{pmatrix} B & \alpha \\ \alpha^* & c \end{pmatrix}$$

avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}),\ \alpha \in \mathbb{C}^{n-1}$ *et* $c \in \mathbb{C}$.

b) Montrer que si on peut écrire A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} M^* & 0 \\ \beta^* & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & \beta \\ 0 & d \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure avec tous les éléments diagonaux réels et strictement positifs, $\beta \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$, alors le résultat attendu est démontré.

c) Il reste à démontrer (1). Montrer que si B, α et c sont tels que $c \in \mathbb{R}$ et

$$c > \alpha^* B^{-1} \alpha \tag{2}$$

alors la factorisation (1) existe, en précisant qui sont M, β et d en fonction de B, α et c.

d) Montrer qu'on a $c \in \mathbb{R}$.

Montrer ensuite que

$$(x^* \ \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

En déduire l'inégalité (2) en choisissant $x = -B^{-1}\alpha$.