Corrigé Partiel 1 AN 2020-2021

Exo 1.

a) $\begin{cases} U_0 = U_{N+1} \\ \dfrac{U_1 - U_0}{h} = \dfrac{U_{N+1} - U_N}{h} \end{cases}$

les inconnues sont ici U_0 et U_{N+1}

$\iff \begin{cases} U_0 = U_{N+1} \\ U_0 + U_{N+1} = U_1 + U_N \end{cases}$

$\iff \begin{cases} U_0 = U_{N+1} \\ 2U_0 = U_1 + U_N \end{cases}$

Ceci donne $U_0 = U_{N+1} = \dfrac{U_1 + U_N}{2}$

b) $-\dfrac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2} + \gamma U_i = f(x_i)$, $i = 1 \dots n$

donc

$-U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} + \gamma h^2 U_i = h^2 f(x_i)$

donc

$-U_{i-1} + (2 + \gamma h^2) U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i)$, $i = 1 \dots n$

Pour $i = 1$ on utilise a) donc

$-\dfrac{U_1 + U_N}{2} + (2 + \gamma h^2) U_1 - U_2 = h^2 f(x_1)$

(1)' $\left(\frac{3}{2} + \gamma h^2\right) U_1 - U_2 - \frac{1}{2} U_N = h^2 f(x_1)$

Pour i de 2 à $N-1$ nous avons

(2)' $-U_{i-1} + (2 + \gamma h^2) U_i - U_{i+1} = h^2 f(x_i)$

Pour $i = N$ on utilise encore a) donc

$-U_{N-1} + (2 + \gamma h^2) U_N - \dfrac{U_1 + U_N}{2} = h^2 f(x_N)$

(3)' $-\frac{1}{2} U_1 - U_{N-1} + \left(\frac{3}{2} + \gamma h^2\right) U_N = h^2 f(x_N)$

Donc les système de N equations algebriques et linéaire avec N inconnues $U_1 \dots U_N$ est donné par (1)'-(2)'-(3)'.

Ceci s'écrit sous forme matricielle : on pose

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur inconnu

$b = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) \\ \vdots \\ h^2 f(x_N) \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \gamma h^2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2+\gamma h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & & & -1 & 2+\gamma h^2 & -1 \\ 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & & & -1 & \frac{3}{2} + \gamma h^2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & & & & & \end{pmatrix}$$

On peut écrire A sous la forme

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{3}{2} + \gamma h^2 & \text{si } i = j \in \{1, N\} \\ 2 + \gamma h^2 & \text{si } i = j \in [\![2, N-1]\!] \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } (i,j) = (1, N) \text{ ou } (i,j) = (N, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc le système s'écrit sous la forme

$AU = b$.

c) Il est facile à voir que

$A_{ij} = A_{ji} \quad \forall i \neq j$ donc A est symétrique

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ arbitraire

$$\langle Ax, x \rangle = \sum_i \sum_j A_{ij} x_i x_j = \left(\frac{3}{2} + \gamma h^2\right) x_1^2 - 2 x_1 x_2 - x_1 x_N$$
$$+ \left(2 + \gamma h^2\right) x_2^2 - 2 x_2 x_3 \cdots + \left(2 + \gamma h^2\right) x_{N-1}^2 -$$
$$- 2 x_{N-1} x_N + \left(\frac{3}{2} + \gamma h^2\right) x_N^2$$

$$= \underbrace{x_1^2 - 2 x_1 x_2 + x_2^2}_{= (x_1 - x_2)^2 \geq 0} + \underbrace{x_2^2 - 2 x_2 x_3 + x_3^2}_{= (x_2 - x_3)^2 \geq 0} + \cdots$$
$$+ \cdots x_{N-1}^2 - 2 x_{N-1} x_N + x_N^2 + \underbrace{\frac{1}{2} x_1^2 - x_1 x_N + \frac{1}{2} x_N^2}_{= \frac{1}{2} (x_1 - x_N)^2 \geq 0}$$
$$+ \underbrace{\gamma h^2 \sum_{i=1}^N x_i^2}_{\geq 0}$$

Donc $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$

A est positive

d) Dans le cas $\nu > 0$ le calcul precedent nou donne la minoration

$\langle Ax, x\rangle \geq \nu h^2 \|x\|^2$

Donc si $x \neq 0$ alors $\nu h^2 \|x\|^2 > 0$ alors

$\langle Ax, x\rangle > 0$

e) Si $\nu = 0$ alors

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & & 0 & -1 & \frac{3}{2}+\nu h^2 \end{pmatrix}$$

On observe que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

donc $\ker(A) \neq \{0\}$ donc A non inversible

<u>Exo 2.</u>

a) $\|B\|_\infty = \max\{|a|+2, |a|+4, |a|+2\}$

donc

$\|B\|_\infty = |a|+4$

De la mem manier on montre

$\|B\|_1 = \max\{|a|+2|, |a|+4, |a|+2|\}$

donc

$\|A\|_1 = |a|+4$

$\|B\|_2 = \rho(B)$ car B est matrice symetrique en $\mathbb{R}$

On cherche les valeurs propres de B

$$P_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & a-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & a-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{developpe colonne 1}}{=} \cancel{\det} \quad =$$

$$= (a-\lambda)\det\begin{pmatrix} a-\lambda & -2 \\ -2 & a-\lambda \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$= (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2-4\right] - 4(a-\lambda)$

$= (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2-8\right]$

$= (a-\lambda)(a-\lambda-2\sqrt{2})(a-\lambda+2\sqrt{2})$

Les valeurs propres de A sont

$\lambda_1 = a$; $\lambda_2 = a-2\sqrt{2}$, $\lambda_3 = a+2\sqrt{2}$

Alors

$\|B\|_2 = \max\{|a|, |a-2\sqrt{2}|, |a+2\sqrt{2}|\}$

b) Si $a=1$ alors

$\|B\|_\infty = \|B\|_1 = 5$

$\|B\|_2 = \max\{1, |1-2\sqrt{2}|, |1+2\sqrt{2}|\} = 1+2\sqrt{2}$

<u>Exo 3</u>

a) $H_{ij} = \frac{1}{2i+2j-3} = \frac{1}{2j+2i-3} = H_{ji}$ $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$

donc H symetrique

b) Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Alors

$\langle Hx, x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} H_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^{2i+2j-4}\,dt\, x_i x_j$

$= \int_0^1 \sum_i \sum_j t^{2i-2} x_i\, t^{2j-2} x_j\, dt$

$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} t^{2i-2} x_i\right)^2 dt \geq 0$

c) Supposons ~~$\exists$~~ $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle Hx, x\rangle = 0$

Alors $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} t^{2i-2} x_i\right)^2 dt = 0$

Alors la fonction $t \in [0,1] \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i t^{2i-2}$ doit être la fonction nulle. Alors la seule possibilité est $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 0$ (sinon on a un polynome qui ne peut s'annuler éventuellement que dans un nombre fini de points ; contradiction.