Corrigé Partiel 2 AN 2020-2021

Exo 1.

a) $A = D - E - F$ avec $D = 3I_3$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J = D^{-1}(E+F) = \frac{1}{3} I_3 (E+F) = \frac{1}{3}(E+F)$ donc

$$J = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\tilde{J} \quad \text{avec} \quad \tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres de $\tilde{J}$

$P_\lambda(\tilde{J}) = \det(\tilde{J} - \lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -b \\ 0 & -b & -\lambda \end{pmatrix}$ (developper colonne 1)

$P_\lambda(\tilde{J}) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -b \\ -b & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -b & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - b^2) + \lambda = \lambda(1 + b^2 - \lambda^2)$

les trois val. propres de $\tilde{J}$ sont $\tilde{\lambda}_1 = 0$. $\tilde{\lambda}_2 = \sqrt{b^2+1}$ et $\tilde{\lambda}_3 = -\sqrt{b^2+1}$

Alors les 3 val. propres de J sont

$\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \frac{1}{3}\sqrt{b^2+1}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{3}\sqrt{b^2+1}$

Alors $\rho(J) = \frac{1}{3}\sqrt{b^2+1}$

b) Il faut $\frac{1}{3}\sqrt{b^2+1} < 1$ donc $\sqrt{b^2+1} < 3 \iff b^2 + 1 < 9 \iff b^2 < 8 \iff b \in]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$

c) $G = (D-E)^{-1}F$

$P_G(\lambda) = \det((D-E)^{-1}F - \lambda I_3) = \det((D-E)^{-1}F - \lambda(D-E)^{-1}(D-E))$

$= \det\left((D-E)^{-1}(F - \lambda(D-E))\right) = \underbrace{\det((D-E)^{-1})}_{\neq 0} \det(F - \lambda(D-E))$

Alors λ est valeur propre de $G \iff$

$\det(F - \lambda(D-E)) = 0$ donc

$$\det\begin{pmatrix} -3\lambda & -1 & 0 \\ -\lambda & -3\lambda & -b \\ 0 & -\lambda b & -3\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$-\lambda \det\begin{pmatrix} 3 & +1 & 0 \\ 1 & +3\lambda & +b \\ 0 & +b\lambda & +3\lambda \end{pmatrix} = 0 \overset{\text{dev. 1ère colon}}{\iff} -\lambda\left[3\begin{vmatrix} 3\lambda & b \\ b\lambda & 3\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b\lambda & 3\lambda \end{vmatrix}\right] = 0$$

$\iff -\lambda\left[3(9\lambda^2 - b^2\lambda) - 3\lambda\right] = 0 \iff -3\lambda\left[9\lambda^2 - (b^2+1)\lambda\right] = 0$

$\iff -3\lambda^2(9\lambda - b^2 - 1) = 0$

Les val. propres de G sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = \frac{b^2+1}{9}$

d) $\rho(G) = \frac{b^2+1}{9}$. Il faut $\frac{b^2+1}{9} < 1 \iff b^2 + 1 < 9$

$\iff b^2 < 8 \iff b \in]-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}[$

Exo 2.

a) $P_2(y) = f[y_0] + f[y_0, y_1](y - y_0) + f[y_0, y_1, y_2](y - y_0)(y - y_1)$

$f[y_0] = f(y_0) = -e^{-2}$

$f[y_0, y_1] = \dfrac{f(y_1) - f(y_0)}{y_1 - y_0} = \dfrac{0 + e^{-2}}{0 - (-1)} = e^{-2}$

$f[y_1, y_2] = \dfrac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1} = \dfrac{e^2 - 0}{1 - 0} = e^2$

$f[y_0, y_1, y_2] = \dfrac{f[y_1, y_2] - f[y_0, y_1]}{y_2 - y_0} = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} = sh(2)$

$P_2(y) = e^{-2} + e^2(y+1) + sh(2)(y+1)y$

b1) $f'(x) = e^{2x} + 2x e^{2x} = e^{2x}(2x+1)$ ok pour $k=1$

On suppose vraie pour ~~$f(x)$~~ k.

$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) = 2^{k-1}\left[2e^{2x}(2x+k) + e^{2x}.2\right] =$

$= 2^k e^{2x}(2x+k+1)$ donc vraie pour $k+1$

b2) $|f^{(k)}(x)| \leq 2^{k-1} |e^{2x}| . |2x+k|$

Mais $|e^{2x}| = e^{2x} \leq e^2$ car $x \leq 1$

D'autre part si $k \geq 4$ et $x \geq -2$ alors $k + 2x \geq 0$ donc

$|2x+k| = 2x+k \leq k+2$ car $x \leq 1$

On a donc

$|f^{(k)}(x)| \leq 2^{k-1} e^2 (k+2)$

b3) Nous avons

(*) $-2 \leq x \leq 1$

$-2 \leq x_i \leq 1$ $\forall i = 0 \dots n$

donc

(**) $-1 \leq -x_i \leq 2$

En faisant la somme entre (*) et (**) on trouve

$-3 \leq x - x_i \leq 3$ donc

$|x - x_i| \leq 3$ $\forall i = 0 \dots n$

$\forall x \in [-2, 1]$

En faisant le produit on trouve

$$|(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)| \leq 3^{n+1} \qquad \forall x \in [-2,1]$$

b4/ On utilise le resultat du cours

De b2) on deduit

$$\sup_{x\in[-2,1]} |f^{(n+1)}(x)| \leq 2^n e^2 (n+3)$$

~~b b3) on~~ En utilisant le resultat de b3) on a

$$|E_n(x)| \leq \frac{2^n e^2 (n+3)}{(n+1)!} \cdot 3^{n+1}$$

donc

$$|E_n(x)| \leq 3e^2\, 6^n \frac{(n+3)}{(n+1)!} \leq 3e^2 \,\cancel{n+3}\, \frac{n+3}{n+1} \frac{6^n}{n!}$$

Nous avons

$$\frac{n+3}{n+1} \leq 2 \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*$$

donc

$$\sup_{x\in[-2,1]} |E_n(x)| \leq 6e^2 \frac{6^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Nous savons que $\frac{6^n}{n!} \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow \infty$

car c'est le terme general de la serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!} = e^6$$

~~Ceci~~ Donc

$$\sup_{x\in[-2,1]} |E_n(x)| \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \longrightarrow \infty.$$

Exercice 3.

a) $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \cdots 0 & 1 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & -1 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

On ajoute la ligne 1 aux autre $n-1$ lignes :

~~$\det(A_n) =$~~

$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \vdots & -1 & 1 & 2 \\ \vdots & & & & 2 \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$

La premiere colonne devient e_1 ; on devellope selon la colonne 1 :

$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \cdots & 0 & 2 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & -1 & & 1 & 2 \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$ donc

$\det(A_n) = 2 \det(A_{n-1})$

b) On ~~montre facilement~~ a

$\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) = 2 \cdot 2 \det(A_{n-2}) = \cdots \; 2^{n-2}\det(A_2)$

$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ donc

$\det(A_n) = 2^{n-1}$ ceci $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

c) On observe que toutes les sous-matrices principale sont triangulaires superieures avec 1 sur la diagonale (donc inversible de determinant $=1$) sauf la dernier qui est A_n qui est aussi inversible car son determinant est $2^{n-1} \neq 0$. Par un théorème du cours on a que A admet une décomposition LU.

Nous avons en plus $U_{11} = 1$

$$U_{ii} = \frac{\det(B_i)}{\det(B_{i-1})} \quad \forall i = 2 \dots n$$

avec B_i la ~~sous~~ i-sous-matrice principale de A_n (obtenue avec les i premières lignes et colonnes de A_n)

Si $i \leq n-1$ alors $\det(B_i) = 1$ donc

$U_{ii} = 1$

Si $i = n$ alors $\det(B_n) = \det(A_n) = 2^{n-1}$

donc $U_{nn} = 2^{n-1}$