Corrigé Partiel 3 AN 2020-2021

Exo 1.

a) $f'(x) = e^x - 1 > 0$ si $x > 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ $\left(\text{car } e^x - x - 2 = \underbrace{e^x}_{\to \infty}\underbrace{\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)}_{\to 1} \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty\right)$

x	0	r	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	0	$+\infty$

On a donc existence et unicité de $r > 0$ t.q $f(r) = 0$

$f(1) = e - 3 < 0$; $f(2) = e^2 - 4 > 0$ (car $e > 2$)

donc $1 < r < 2$.

b1) $e^x - x - 2 = 0 \iff x = e^x - 2 = g_1(x)$

b2) $g_1'(r) = e^r - 1$. Comme $r > 1$ alors $g_1'(r) > e - 1 > 1$

donc $|g_1'(r)| > 1$.

Donc on n'a pas de convergence locale

c1) $e^x - x - 2 = 0 \iff e^x = x + 2$

On peut appliquer $\ln(\ )$ car $x + 2 > 0$

~~Ae~~ On obtient $x = \ln(x+2) = g_2(x)$

c2) $g_2'(x) = \frac{1}{x+2}$. ~~Car~~ donc $g_2'(r) = \frac{1}{r+2}$

On a $g_2'(r) > 0$ et $g_2'(r) < \frac{1}{3}$ car $r > 1$

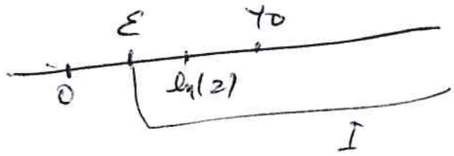
donc $|g_2'(r)| < \frac{1}{3}$

On a donc la convergence locale de la method

c3) On prend $\varepsilon > 0$ assez petit tel que

$\varepsilon < y_0$ et $\varepsilon < \ln(2)$

donc $0 < \varepsilon < \min\{y_0, \ln(2)\}$



~~Ae~~ On pose $I = [\varepsilon, +\infty[$.

Par le choix de ε on a

$y_0 \in I$.

D'autre part si $x \geq \varepsilon$ alors $x > 0 \Rightarrow x + 2 > 2 \Rightarrow$

$\ln(x+2) > \ln(2) > \varepsilon$ (par le choix de ε)

Ceci donne alors

(1)' $g_2(I) \subset I$.

D'autre part, comme $g_2'(x) = \frac{1}{x+2}$ et $x > 0$ on a

$0 < g_2'(x) < \frac{1}{2}$ $\forall x \in I$ donc

(2)' $|g_2'(x)| < \frac{1}{2}$ $\forall x \in I$.

D'autre ~~Alors~~ part $\forall u, v \in I$ il existe $w \in I$ tel que

$|g_2(u) - g_2(v)| = |g_2'(w)||u-v| \leq \frac{1}{2}|u-v|$

(utiliser TAF ~~ϕ~~ et (2)')

Alors g_2 est strictement contractante

~~De~~ ~~D~~ En utilisant aussi (1)' les hypothèses du Théorème de point fixe de Banach-Picard sont satisfaites, ce qui nous donne le resultat.

Exo 2.

a) On utilise la formule de Duhamel :

$x(t) = \exp\left(\int_1^t \frac{2\tau}{\tau^2+1} d\tau\right) \cdot 4 + \int_1^t \exp\left(\int_s^t \frac{2\tau}{\tau^2+1} d\tau\right) s\, ds$

Une primitive de $\frac{2\tau}{\tau^2+1}$ est $\log(\tau^2+1)$, donc

$x(t) = \exp\left(\log\left(\frac{t^2+1}{2}\right)\right) \cdot 4 + \int_1^t \exp\left(\log\left(\frac{t^2+1}{s^2+1}\right)\right) \cdot s\, ds$

$= 4\left(\frac{t^2+1}{2}\right) + \int_1^t \frac{t^2+1}{s^2+1} s\, ds = 2(t^2+1) + (t^2+1)\frac{1}{2}\left[\log(s^2+1)\right]_1^t$

On a alors

$x(t) = 2(t^2+1) + \frac{t^2+1}{2} \log\left(\frac{t^2+1}{2}\right)$.

b) i) $x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0)$,

avec $f(t,x) = \frac{2t}{t^2+1} x + t$; $x_0 = 4$; $t_0 = 1$

~~donc~~

~~$x_1 = 4 + \frac{1}{10}\frac{2}{2} 4 = 4,4 + 1 = 5,4$~~

On a $f(t_0, x_0) = \frac{2}{2} \cdot 4 + 1 = 5$

Alors $x_1 = 4 + \frac{1}{10} \cdot 5 = 4,5$

ii) On pose $k_1 = f(t_0, \cancel{\varphi} x_0) = \cancel{\frac{2}{2} \cdot 4 = 4}\ 5$

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} k_1\right) \quad \text{donc}$$

$$k_2 = \frac{2.\left(1+\frac{1}{20}\right)}{\left(1+\frac{1}{20}\right)^2+1}\left(4 + \frac{1}{20}\cdot 5\right) + 1 + \frac{1}{20}$$ à calculer ...

Finalement $x_1 = x_0 + h k_2$ à calculer

$$= 4 + \frac{1}{10}\cdot(\underbrace{k_2}_{\text{obtenu avant}})$$

Exo 3.

I a) On cherche q sous la forme

$q(x) = Ax + B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

$q'(x) = A = g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ donc

$A = g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Ceci donne

$B = g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{\alpha+\beta}{2} g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$

Alors

$$q(x) = g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

II b) On a : $r\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = r'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$

Alors par Taylor autour de $\frac{\alpha+\beta}{2}$ on a

$$r(x) = r\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + r'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{1}{2} r''(\xi)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2.$$

avec $\xi \in]\alpha, \beta[$. et $r'' = g''$ (car $q'' = 0$) ~~alors~~

Comme $r\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = r'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$. Alors

alors

$$|r(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x\in[\alpha,\beta]} |g''(x)| \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$$

$$\int_\alpha^\beta |r(x)|\,dx \leq \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 dx \max_{x\in[\alpha,\beta]} |g''(x)|$$

On a le calcul :

$$\int_\alpha^\beta \left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3\right]_{x=\alpha}^{x=\beta} = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

ce qui donne le résultat.

c)

$$(3)' \quad |\hat{e}_0(g)| = \left|\int_\alpha^\beta g(x)\,dx - (\beta-\alpha)g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right|$$

D'autre part de I a) = 1

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx = \int_\alpha^\beta g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx + g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\int_\alpha^\beta \left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx$$

On observe que

$$\int_\alpha^\beta \left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx = 0$$ ce qui donne

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx = (\beta-\alpha)g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \hat{I}_0(g)$$

Avec (3)' on déduit

$$|\hat{e}_0(g)| = \left|\int_\alpha^\beta g(x)\,dx - \int_\alpha^\beta q(x)\,dx\right|$$ donc

$$|\hat{e}_0(g)| = \left|\int_\alpha^\beta r(x)\,dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |r(x)|\,dx$$

De I b) on obtient le résultat