Polytech Lyon, MAM3A, 2020-2021

Analyse Numérique (AN)

Partiel 1 - octobre 2020

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Soit $\Omega =]a,b[$ un ouvert borné dans $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On se donne aussi une fonction $f \in C(\bar{\Omega})$ et une constante $\gamma \geq 0$.
On considère l'q̀uation différentielle suivante: trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisfaisant

$$-u''(x) + \gamma\, u(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega \tag{1}$$

avec les conditions aux limites périodiques suivantes:

$$u(a) = u(b) \tag{2}$$

et

$$u'(a) = u'(b). \tag{3}$$

Dans la suite de l'exercice on va utiliser la méthode et les notations du cours pour construire une approximation du problème (1) - (2) - (3). On fixe $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$ assez grand, on pose $h = \frac{b-a}{N+1}$, on pose $x_i = a + ih$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots N+1\}$ et on note par U_i une approximation de $u(x_i)$.
Pour tout $i = 1, 2, \cdots N$ on approche en (1) $u''(x_i)$ par $\frac{U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}}{h^2}$ et $u(x_i)$ par U_i. On approche en (2) $u(a)$ par U_0 et $u(b)$ par U_{N+1} et en (3) $u'(a)$ par $\frac{U_1 - U_0}{h}$ et $u'(b)$ par $\frac{U_{N+1} - U_N}{h}$.

a) Ecrire les approximations de (2) et (3) comme deux équations faisant intervenir U_0, U_1, U_N et U_{N+1}. Montrer qu'on peut exprimer U_0 et U_{N+1} en fonction de U_1 et U_N.

b) Ecrire un système algébrique linéaire d'inconnues $U_1, U_2, \cdots U_N$ qui approche le problème (1) - (2) - (3). Ecrire ce système sous la forme matricielle $AU = b$ avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ à préciser.

c) Montrer que A est une matrice symétrique et positive.

d) On suppose ici que $\gamma > 0$.
Montrer que A est une matrice définie positive.

e) On suppose ici que $\gamma = 0$.
Montrer que A n'est pas une matrice inversible
Indication: mettre en évidence un élément non nul de $Ker(A)$.

Exercice 2.

a) Calculer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ les normes subordonnées $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ de la matrice réelle

$$B = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ -2 & a & -2 \\ 0 & -2 & a \end{pmatrix}$$

b) Donner ces 3 normes dans le cas particulier $a = 1$.

Exercice 3.

Pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on considère la matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$H_{ij} = \frac{1}{2i + 2j - 3}, \quad \forall\, i, j \in [[1, n]].$$

a) Montrer que H est une matrice symétrique.

b) Montrer que H est une matrice positive.

Indication: utiliser la définition et le fait que $\frac{1}{2i+2j-3} = \int_0^1 t^{2i+2j-4}\, dt$.

c) Montrer que H est une matrice définie positive.