Polytech Lyon, MAM3A, 2020-2021

Analyse Numérique (AN)

Partiel 2 - 2020

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$$

avec $b \in \mathbb{R}$ un paramètre.

On se propose d'étudier la convergence des méthodes itératives de Jacobi et respectivement de Gauss-Seidel pour la résolution des systèmes algébriques linéaires ayant A comme matrice des coefficients.

a) Calculer en fonction de b le rayon spectral de la matrice J de Jacobi associée à A.

b) Trouver $b \in \mathbb{R}$ pour lesquels la méthode de Jacobi converge.

c) Calculer en fonction de b le rayon spectral de la matrice G de Gauss-Seidel associée à A.

b) Trouver $b \in \mathbb{R}$ pour lesquels la méthode de Gauss-Seidel converge.

Exercice 2.

Soit $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x) = xe^{2x}, \quad \forall\, x \in [-2, 1].$$

a) Construire le polynome d'interpolation de Lagrange de f aux points $y_0 = -1,\ y_1 = 0$ et $y_2 = 1$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ on considère la division suivante sur $[-2, 1]$: on pose $h = \frac{3}{n}$ et ensuite $x_j = -2 + jh,\ \ j \in [[0, n]]$. On considère alors P_n le polynome d'interpolation de f aux points $x_0, x_1, \cdots x_n$. On pose $E_n = P_n - f$ et on se propose de montrer que

$$\sup_{x \in [-2,1]} |E_n(x)| \to 0 \quad \text{pour} \quad n \to +\infty.$$

b1) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f^{(k)}(x) = 2^{k-1} e^{2x}(2x + k), \quad \forall\, x \in [-2, 1].$$

b2) Montrer l'inégalité

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leq e^2 2^{k-1}(k + 2), \quad \forall\, x \in [-2, 1], \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ k \geq 4.$$

b3) Majorer par une constante indépendante de $x \in [-2, 1]$ (mais dépendante de n) l'expression

$$|(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|.$$

b4) Montrer le résultat attendu.

Exercice 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ on considère la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad i > j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad j = n \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

a) Trouver une relation de récurrence entre $det(A_n)$ et $det(A_{n-1})$
Indication: ajouter l'une des lignes de A_n aux autres lignes.
b) Calculer $det(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ la matrice A_n admet une décomposition LU et calculer les coefficients diagonaux de la matrice U.