Polytech Lyon, MAM3A, 2020-2021

Analyse Numérique (AN)

Partiel 3 - janvier 2021

Durée 1h et 30min - Cours, TD et calculettes autorisés

Exercice 1.
On se donne la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x - x - 2, \quad \forall\, x > 0.$$

a) Montrer l'existence et l'unicité d'une racine r de f (donc $f(r) = 0$).
Monter qu'on a en plus $1 < r < 2$.

b) Nous considérons ici la fonction $g_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g_1(x) = e^x - 2, \quad \forall\, x > 0.$$

b1) Montrer que x est racine de f si et seulement si x est point fixe de g_1.

b2) Considérons la méthode des approximations successives associée à la fonction g_1. A-t-on la convergence locale de cette méthode? Justification.

c) Nous considérons ici la fonction $g_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g_2(x) = \ln(x + 2), \quad \forall\, x > 0.$$

c1) Montrer que x est racine de f si et seulement si x est point fixe de g_2.

c2) Considérons la méthode des approximations successives associée à la fonction g_2. Montrer qu'on a la convergence locale de cette méthode.

c3) Montrer que pour tout $y_0 > 0$ on peut trouver un intervalle fermé I avec $I \subset]0, +\infty[$ et $y_0 \in I$ tel que la restriction de g_2 sur I satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Banach-Picard vu en cours. En déduire la convergence globale de la méthode des approximations successives associée à la fonction g_2.

Exercice 2.
On considère le problème de Cauchy: trouver $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant l'EDO suivant avec condition initiale:

$$(1) \qquad \begin{cases} x'(t) &= \frac{2t}{t^2+1}\, x(t) + t, \quad t \in \mathbb{R} \\[2ex] x(1) &= 4. \end{cases}$$

a) Donner la solution du problème (1).

b) On se propose de donner une approximation numérique de la solution de (1) pour $t \in [1, 2]$. On considère la discrétisation suivante de l'intervalle $[1, 2]$:

$$t_n = 1 + nh, \quad n \in [[0, N]], \quad h = \frac{1}{N}, \quad N \in \mathbb{N}^*.$$

On supposera dans la suite que $N = 10$. Déterminer l'approximation x_1 de $x(t_1)$ obtenue par:

(i) La méthode d'Euler explicite
(ii) La méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 2 (ou à 2 étages).

Exercice 3.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$ et $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $g \in C^2([\alpha, \beta])$. On pose $\tilde{I}(g) = \int_\alpha^\beta g(t)\,dt$ et $\tilde{I}_0(g)$ une approximation de $\tilde{I}(g)$ obtenue en utilisant la formule simple du rectangle avec point milieu, c'est à dire

$$\tilde{I}_0(g) = (\beta - \alpha) g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Nous notons $\tilde{e}_0(g) = \tilde{I}(g) - \tilde{I}_0(g)$ l'erreur d'approximation.
Le but de l'exercice est de montrer que

$$|\tilde{e}_0(g)| \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{24} \max_{\tau \in [\alpha, \beta]} |g''(\tau)|. \tag{2}$$

On considère le polynome q de degré inférieur ou égal à 1 satisfaisant

$$q\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = g\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad \text{et} \quad q'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = g'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right). \tag{3}$$

a) Montrer l'existence et l'unicité d'un tel polynome q et écrire q en fonction de $\alpha, \beta, g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ et $g'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.
Indication: procéder de manièr élémentaire en cherchant q sous la forme générale d'un polynome de degré inférieur ou égal à 1.

b) On pose ici $r = g - q$. En utilisant un développement de Taylor pour la fonction r autour de $\frac{\alpha+\beta}{2}$ montrer que

$$\int_\alpha^\beta |r(x)|\,dx \leq \frac{(\beta - \alpha)^3}{24} \max_{\tau \in [\alpha, \beta]} |g''(\tau)|.$$

c) En déduire l'inégalité (2).