Corrigé ~~p~~ Partiel 1 AN 2021-2022

Exo 1.

a) $\frac{U_1 - U_0}{h} = \alpha$ donc $U_1 - U_0 = \alpha h$ donc

$U_0 = U_1 - \alpha h$

$\frac{U_{N+1} - U_N}{h} = \cancel{\beta}\, 0$ donc $U_{N+1} = U_N$

b) Une approximation en x_i de (1) est

$$-\frac{\gamma_{i+1/2}\frac{U_{i+1}-U_i}{h} - \gamma_{i-1/2}\frac{U_i - U_{i-1}}{h}}{h} + \beta U_i = f(x_i) \quad \text{donc}$$

$$-\gamma_{i+1/2}(U_{i+1}-U_i) + \gamma_{i-1/2}(U_i - U_{i-1}) + \beta h^2 U_i = h^2 f(x_i) \qquad i = 1 \cdots N$$

ce qui s'écrit :

$$-\gamma_{i-1/2} U_{i-1} + (\gamma_{i+1/2} + \gamma_{i-1/2} + \beta h^2) U_i - \gamma_{i+1/2} U_{i+1} = h^2 f(x_i) \qquad i = 1 \cdots N$$

Pour $i = 1$ en utilisant $U_0 = U_1 - \alpha h$ on obtient

$$(\gamma_{3/2} + \beta h^2) U_1 - \gamma_{3/2} U_2 = -\alpha h \gamma_{1/2} + f(x_1)$$

Pour $i = N$ en utilisant $U_{N+1} = U_N$ on obtient

$$-\gamma_{N-1/2} U_{N-1} + (\gamma_{N-1/2} + \beta h^2) U_N = h^2 f(x_N)$$

On pose $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$ avec $b_i = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } i \geq 2 \\ -\alpha h \gamma_{1/2} + f(x_1) & \text{si } i = 1 \end{cases}$

Alors le système s'écrit

$AU = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_{3/2} + \beta h^2 & -\gamma_{3/2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma_{3/2} & \gamma_{3/2} + \gamma_{5/2} + \beta h^2 & -\gamma_{5/2} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & -\gamma_{N-1/2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\gamma_{N-3/2} & \gamma_{N-3/2} + \gamma_{N-1/2} + \beta h^2 & \\ & & 0 & 0 & -\gamma_{N-1/2} & \gamma_{N-1/2} + \beta h^2 \end{pmatrix}$$

donc $A_{ij} = \begin{cases} \gamma_{i-1/2} + \gamma_{i+1/2} + \beta h^2 & \text{si } i = j \in [\![2, N-1]\!] \\ \gamma_{3/2} + \beta h^2 & \text{si } i = j = 1 \\ \gamma_{N-1/2} + \beta h^2 & \text{si } i = j = N \\ -\gamma_{i+1/2} & \text{si } j = i+1 \\ -\gamma_{i-1/2} & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2 \end{cases}$

c) $A_{i,i+1} = -\gamma_{i+1/2}$

$A_{i+1,i} = -\gamma_{i+1-1/2} = -\gamma_{i+1/2}$ > donc $A_{i,i+1} = A_{i+1,i}$

Si $|i-j| \geq 2$ alors $A_{ij} = A_{ji} = 0$

donc A symetrique

$\forall x \in \mathbb{R}^N$ on a

$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} A_{ij} x_i x_j = (\gamma_{3/2} + \beta h^2) x_1^2 - 2\gamma_{3/2} x_1 x_2 +$

$+ (\gamma_{3/2} + \gamma_{5/2} + \beta h^2) x_2^2 - 2\gamma_{5/2} x_2 x_3 + \dots$

$(\gamma_{N-3/2} + \gamma_{N-1/2} + \beta h^2) x_{N-1}^2 - 2\gamma_{N-1/2} x_{N-1} x_N + (\gamma_{N-1/2} + \beta h^2) x_N^2$

$= \gamma_{3/2} \underbrace{(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)}_{=(x_1-x_2)^2 \geq 0} + \gamma_{5/2}(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + \dots$

$\gamma_{N-1/2} \underbrace{(x_{N-1}^2 - 2x_{N-1}x_N + x_N^2)}_{=(x_{N-1}-x_N)^2 \geq 0} + \beta h^2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)}_{\geq 0}$

$\forall x \in \mathbb{R}^N$

donc

(*) $\langle Ax, x\rangle \geq \beta h^2 \|x\|^2$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$

Comme $\beta > 0$ alors $\langle Ax, x\rangle \geq 0$

donc A est positive

d) On a

$\langle Ax, x\rangle \geq \beta h^2 \|x\|^2 > 0$ si $x \neq 0$ ($\Rightarrow \|x\|^2 > 0$) car $\beta > 0$

donc A est définie positive

e) si $\beta = 0$ alors on peut voir que le vecteur $(1, 1, \dots, 1)^T$ est dans $\ker(A)$ car

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Donc A n'est pas inversible

Exo 2

a) On peut ecrire A sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} b_1 e_1^T \\ b_2 e_1^T \\ \vdots \\ b_n e_1^T \end{pmatrix} \quad \text{Alors } A x = \begin{pmatrix} b_1 e_1^T x \\ b_2 e_1^T x \\ \vdots \\ b_n e_1^T x \end{pmatrix} \quad \text{donc}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} b_1 x_1 \\ b_2 x_1 \\ \vdots \\ b_n x_1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad Ax = x_1 b$$

Alors $\|Ax\|_p = |x_1| \, \|b\|_p$ (utiliser l'homogeneité d'une norme)

~~donc~~ $\cancel{\|Ax\|_p \le |x_1| \, \|b\|_p}$

b) On a: $\sum_{i=1}^n |x_i|^p \geq |x_1|^p$ donc $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \geq |x_1|$ $\forall x \in \mathbb{K}^n$

donc $|x_1| \le \|x\|_p$

Alors de a) $\Rightarrow$

$\|Ax\|_p \le \|b\|_p \|x\|_p$ et on obtient

$\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} \le \|b\|_p$ $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $x \neq 0$

En passant au "sup" on a le résultat.

c) Prendre ici $x = e_1$. Alors

$A e_1 = b$ donc

$\|A e_1\|_p = \|b\|_p$

Comme $\|e_1\|_p = 1$ alors

$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p \geq \|Ae_1\| = \|b\|_p$

donc $\|A\|_p \geq \|b\|_p$

Avec b) on a l'égalité $\|A\|_p = \|b\|_p$

d) On utilise les points précédents avec

$n = 3$; $p = 3$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Alors $\|A\|_3 = \|b\|_3 = (1^3 + 2^3 + 1^3)^{1/3} = 10^{1/3} = \sqrt[3]{10}$

Exo 3.

a) ~~Comme~~ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ val propre de A donc il existe $x \in \mathbb{C}^n$: $x \neq 0$ tel que

(1)' $Ax = \lambda x$; comme $A^T A = I_n$ alors

On obtient $A^T A x = \lambda A^T x$

(2)' $x = \lambda A^T x$

D'autre part on applique $*$ à (1)' $\Rightarrow$

$x^* A^* = \bar{\lambda} x^*$; mais $A^* = A^T$ car A ~~$\in \mathbb{R}$~~ réelle

donc

$x^* A^T = \bar{\lambda} x^*$; ceci donne

$x^* A^T A = \bar{\lambda} x^* A$ donc

(3)' $x^* = \bar{\lambda} x^* A$

De (2)' et (3)' $\Rightarrow$ $x^* x = \bar{\lambda} x^* A \lambda A^T x =$

$= \underbrace{\bar{\lambda}\lambda}_{=|\lambda|^2} x^* \underbrace{A A^T}_{= I_n} x$ donc

$x^* x = |\lambda|^2 x^* x$. Cela s'écrit

$\|x\|^2 (1 - |\lambda|^2) = 0$ Comme $\|x\|^2 \neq 0$ (car $x \neq 0$) alors $|\lambda|^2 = 1$ donc $|\lambda| = 1$

b) Nous avons encore et avec ~~$X \neq 0$~~ $X, Y \in \mathbb{C}^n$ $X \neq 0$, $Y \neq 0$

(4)' $AX = \lambda X$

(5)' $AY = \mu Y$

De (4)' $\Rightarrow$ $A^T A X = \lambda A^T X$ donc

(6)' $X = \lambda A^T X$ donc $Y^T A^T A = \mu Y^T A$ donc

De (5)' $\Rightarrow$ $Y^T A^T = \mu Y^T$

(7)' $Y^T = \mu Y^T A$ donc

De (6)', (7)' $\Rightarrow$ $Y^T X = \cancel{\mu Y^T A}\ \mu \lambda Y^T \underbrace{A A^T}_{= I_n} X$

$Y^T X = \mu \lambda Y^T X$ donc $(1 - \mu\lambda) Y^T X = 0$

~~(car $\mu \neq \frac{1}{\lambda}$) alors $Y^T X = 0$~~

~~Comme $\mu\lambda \neq 1$~~

On déduit $Y^T X = 0$ si on montre $\mu\lambda \neq 1$

Par absurde si on avait $\mu\lambda = 1$ alors $\lambda = \frac{1}{\mu}$. Comme $|\mu| = 1$ (de a)) alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$ t.q $\mu = e^{i\theta}$. Alors $\frac{1}{\mu} = e^{-i\theta} = \bar{\mu}$ donc $\lambda = \bar{\mu}$ contradiction