Corrigé Partiel 2 AN 2021-2022

Exo 1.

a) On pose $S = (A \;\; b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

app Algorithme de Gauss

$S^{(1)} = S$: on pose $\alpha_2^{(1)} = \frac{2}{1} = 2$; $\alpha_3^{(1)} = \frac{4}{1} = 4$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$

$$S^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

On pose $\alpha_3^{(2)} = \frac{-3}{-3} = 1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$S^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} = (A^{(3)} \;\; b^{(3)})$$

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

~~On a aussi~~ $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ conformément à la théorie du cours

$A = LU$.

Le système de départ est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -2x_3 = 8 \end{cases}$$

On résoud par une remontée :

$x_3 = \frac{8}{-2} = -4$

$-3x_2 = -2 - 8 = -10 \quad \rightarrow x_2 = \frac{10}{3} \quad$ donc $x = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -4 \end{pmatrix}$

$x_1 = -1 - x_2 - 2x_3 = -1 - \frac{10}{3} + 8 = \frac{11}{3}$

b) L'algorithme de Gauss nous donne

$$A = LU$$

avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_2^{(1)} & 1 & 0 \\ \alpha_3^{(1)} & \alpha_3^{(2)} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $Ax = b \iff LUx = b$

On pose $y = Ux$ donc $Ly = b$ donc

$$\begin{cases} y_1 = -1 \\ 2y_1 + y_2 = -4 \\ 4y_1 + y_2 + y_3 = 2 \end{cases}$$

donc $y_1 = -1$

$y_2 = -4 - 2y_1 = -4+2 = -2$

$y_3 = 2 - 4y_1 - y_2 =$
$= 2+4+2 = 8$

$$y = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ensuite resoudre $Ux = y$

$U\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ c'est exactement comme à la fin de a), ça donne $x = \begin{pmatrix} 11/3 \\ 10/3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Exo 2.

a) facile : $|A_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$

pour $i = 2$ $|A_{22}| = 1$; $\sum_{j \neq 2} |A_{2j}| = 1$

on a "=" mais pas ">".

b) b1) $\lambda \in Sp(G) \iff \det(G - \lambda I_3) = 0 \iff \det\left((D-E)^{-1}F - \lambda (D-E)^{-1}(D-E)\right) = 0$

$\det\left((D-E)^{-1}F - \lambda I_3\right) = 0 \iff$

$\iff \det\left(-(D-E)^{-1}(\lambda(D-E) - F)\right) = 0 \iff \underbrace{\det\left(-(D-E)^{-1}\right)}_{\neq 0} \det(\widehat{G}_\lambda) = 0$

$\iff \det(\widehat{G}_\lambda) = 0$

b2) $\det(\widehat{G}_\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha & \beta \\ \lambda & \lambda & 0 \\ \alpha\lambda & \beta\lambda & \lambda \end{vmatrix}$ dev. colonne 3 $= \beta \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \alpha\lambda & \beta\lambda \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & \alpha \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} =$

$= \beta(\beta\lambda^2 - \alpha\lambda^2) + \lambda(\lambda^2 - \alpha\lambda) = \lambda^2(\beta^2 - \beta\alpha) + \lambda^2(\lambda - \alpha)$

$= \lambda^2(\beta^2 - \beta\alpha + \lambda - \alpha)$

Alors $\det(\tilde{G_\lambda}) = 0 \iff \lambda^2(\lambda - \alpha - \beta\alpha + \beta^2) = 0$

$\iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = \alpha + \beta\alpha - \beta^2 \end{cases}$. Alors $Sp(G) = \{0, \alpha + \alpha\beta - \beta^2\}$

donc $\rho(G) = \max\{0, |\alpha + \alpha\beta - \beta^2|\} = |\alpha + \alpha\beta - \beta^2|$

b3) $\rho(G) \leq |\alpha| + |\alpha|\cdot|\beta| + |\beta|^2 = |\alpha| + |\beta|\,(\underbrace{|\alpha| + |\beta|}_{<1})$

$\leq |\alpha| + |\beta| < 1$

c) Si $\beta = 0$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(D = I)$

c1) $J = D^{-1}(E + F) = E + F$ car $D^{-1} = I$

donc

$J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P_J(\lambda) = \det(J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -\alpha & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$ $\underset{=}{\text{dev. colonne 3}}$

$= (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2 - \alpha)$

$P_J(\lambda) = 0 \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda^2 - \alpha = 0 \end{cases}$

On a 2 cas:

c2) si $\alpha \geq 0$ alors $Sp(J) = \{0, \pm\sqrt{\alpha}\}$, donc $\rho(J) = \sqrt{\alpha}$

si $\alpha < 0$ alors $Sp(J) = \{0, \pm i\sqrt{-\alpha}\}$

donc $\rho(J) = \sqrt{-\alpha}$

Dans tous les cas $\rho(J) = \sqrt{|\alpha|} < 1$ car $\underline{|\alpha| < 1}$.

donc methode itérative Jacobi convergente

Exo 3.

a) On note P_n le polynome d'interpolation de f en $x_0, x_1 \dots x_n$

Q_n — " — $x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$

Par unicité $P_n = Q_n$ (car ce sont les mêmes points dans un autre ordre

$\Rightarrow$ coef de x^n en P_n = coef de x^n en Q_n
ce qui donne le résultat

b)

b1) Il faut montrer

$$f(x_0, x_1) = \int_0^1 f'(x_0 + t_1(x_1 - x_0))\,dt_1$$

Mais $f'(x_0 + t_1(x_1 - x_0)) = \frac{d}{dt_1} f(x_0 + t_1(x_1 - x_0)) \frac{1}{x_1 - x_0}$

Alors

$$\int_0^1 f'(x_0 + t_1(x_1 - x_0))\,dt_1 = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_0^1 \frac{d}{dt_1} f(x_0 + t_1(x_1 - x_0))\,dt_1 =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_0} \left[f(x_0 + t_1(x_1 - x_0)) \right]_{t_1=0}^{t_1=1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1)$$

OK!

b2) On observe

$$E_n(x_0 \dots x_n, t_1 \dots t_n) = \frac{d}{dt_n} f^{(n-1)}(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + \dots t_n(x_n - x_{n-1})) \cdot \frac{1}{x_n - x_{n-1}}$$

Alors

$$\int_0^{t_{n-1}} E_n(x_0 \dots x_n, t_1 \dots t_n) = \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \left[f^{(n-1)}(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + \dots t_n(x_n - x_{n-1})) \right]_0^{t_{n-1}}$$

$t_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2})$

$$= \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \left(f^{(n-1)}(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + \dots t_{n-1}(x_n - x_{n-2})) - \right.$$

$$\left. - f^{(n-1)}(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + \dots t_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2})) \right)$$

En intégrant d'abord en t_{n-1} ensuite en t_{n-2} ... à la fin en t_1 on obtient le resultat b3) Par permutativité a) ou 4 de b2) :

$$g(x_0, x_1 \dots x_n) = \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \left\{ f[x_n, x_0, x_1 \dots x_{n-2}] - f[x_0, \dots x_{n-2}, x_{n-1}] \right\}$$

$$\overset{\text{propriété vu en cours}}{=} f[x_n, x_0, x_1 \dots x_{n-2}, x_{n-1}] \overset{\text{par permutative}}{=} f[x_0, x_1 \dots x_{n-1}, x_n]$$

Ok!

c) ~~De (2)~~

$$\cancel{f[x, x, \dots x] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}} \quad (x, x, \dots x, t_1, t_2 \dots t_n) = f^{(n)}(x)$$

On observe que $E_n(x, x, x, \dots x, t_1, t_2 \dots t_n) = f^{(n)}(x)$

Alors

$$f[x, x, \dots x] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \underbrace{f^{(n)}(x)}_{\text{const}} \, dt_{n-1} \, dt_{n-2} \dots$$

$$= f^{(n)}(x) \int_0^1 \int_0^{t_1} \dots \underbrace{\int_0^{t_{n-2}} \cancel{1\, dt_{n-1}} \underbrace{\int_0^{t_{n-1}} 1 \, dt_{n-1}}_{= t_{n-1}} dt_{n-1}}_{= \frac{1}{2} t_{n-2}^2} = \dots$$

... etc ... $= f^{(n)}(x) \dfrac{1}{n!}$