Corrigé Partiel 3 AN 2021-2022

Exo 1.

a) On doit avoir "=" en (1) pour $f(x)=1$, $f(x)=x$ et $f(x)=x^2$

Pour $f=1$ ça donne

$(1)'$ $2 = \alpha + \beta + \gamma$

Pour $f(x)=x$

$(2)'$ $0 = -\frac{1}{3}\alpha + 0 + \frac{1}{3}\cancel{\beta}\gamma$

Pour $f(x)=x^2$

$(3)'$ $\frac{2}{3} = \alpha\frac{1}{9} + \beta\cdot 0 + \gamma\cdot\frac{1}{9}$

De $(2)'$ on deduit $\alpha = \gamma$ ce qui avec $(3)'$ nous donne

$\alpha = \gamma = 3$

~~Finalem~~ Finalement de $(1)'$ on obtient

$\beta = -4$.

b) Pour $f(x)=x^3$ on a

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ et $3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 4\cdot 0 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0$

donc on a "=" en (1)

Donc l'ordre de (1) est au moins 3.

Pour $f(x)=x^4$?

$\int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}$ et $3\left(-\frac{1}{3}\right)^4 + 4\cdot 0 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}$

donc on n'a pas "=" en (1)

L'ordre de (1) est alors 3.

Exo 2.

a) On utilise la continuité de g'

$g'(r) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est un voisinage de $g'(r)$

alors $\exists\, \alpha > 0$ t.q si $x \in]r-\alpha, r+\alpha[$ alors $g'(x) \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ donc $x \in D$.

b) On utilise la continuité de φ

B_α est un voisinage de ~~r donc de~~ r et $r = \varphi(r)$

alors $\exists\, \beta > 0$ t.q $\forall x \in]r-\beta, r+\beta[$ alors $\varphi(x) \in B_\alpha$.

c) De b) si $x \in B_\beta$ alors $\varphi(x) \in B_\alpha$;
~~et~~ de a) on déduit que $g'(\varphi(x)) \neq 0$ donc
f est bien définie.
D'autre part
$$f(r) = r - \frac{\overbrace{g(r)}^{=0}}{g'(\varphi(r))} = r .$$

d) $g \in C^3$, $g' \in C^2$, $\varphi \in C^2$ donc $g' \circ \varphi \in C^2$
et $g' \circ \varphi \neq 0$ sur B_β. alors $\frac{g}{g' \circ \varphi} \in C^2$ sur B_β

donc $f \in C^2$ sur B_β.
$\forall x \in B_\beta$ on a $f'(x) = 1 - \frac{g'(x)g'(\varphi(x)) - g(x)g''(\varphi(x))\varphi'(x)}{[g'(\varphi(x))]^2}$

Alors
$$f'(r) = 1 - \frac{[g'(r)]^2 - 0}{[g'(r)]^2} = 0$$
On utilise un ~~théorème~~ résultat du cours (car $|0| = 0 < 1$)
ce qui nous donne l'existence d'un δ avec $0 < \delta < \beta$
avec les propriétés demandées.
En plus l'ordre de la méthode est au moins 2
(comme pour la méthode de Newton).

Exercice 3.

a) On pose
$M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$ donc $M = \{-1, 1\}$ de (3).
On a donc deux solutions
$y(t) = -1$ constante
ou
$y(t) = 1$ constante
Cherchons des solutions $y(t)$ avec $y^2(t) - 1 \neq 0$
On divise (1) par $y^2 - 1$

$(4)'$ $\quad \dfrac{y'}{y^2-1} = 1$

D'autre part $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$

et $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x-1|}{|x+1|}\right)$

Alors $(4)'$ s'écrit

$\dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{|y-1|}{|y+1|}\right)\right] = \dfrac{d}{dt}\, t$ donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que

$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{|y-1|}{|y+1|}\right) = t + c$; ceci s'écrit $\ln\left(\dfrac{|y-1|}{|y+1|}\right) = 2t + 2c$

ce qui donne

$\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right| = e^{2c}\, e^{2t}$ ce qui s'écrit :

$\dfrac{y-1}{y+1} = \pm e^{2c}\, e^{2t}$; On va renoter $c_1 = \pm e^{2c} \in \mathbb{R}^*$

donc

$\dfrac{y-1}{y+1} = c_1 e^{2t} \iff y-1 = (y+1)\, c_1 e^{2t}$

Ceci donne

$y\left(1 - c_1 e^{2t}\right) = 1 + c_1 e^{2t}$ donc

$(5)'$ $\quad y(t) = \dfrac{1+c_1 e^{2t}}{1-c_1 e^{2t}}$. On note $J \subset \mathbb{R}$ le domaine de définition de y.

<u>Cas 1.</u> $c_1 < 0$ alors $1 - c_1 e^{2t} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ donc $J = \mathbb{R}$

<u>Cas 2.</u> $c_1 > 0$ alors $1 - c_1 e^{2t} = 0 \iff t = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{c_1}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln c_1$

donc $J = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\ln c_1\right[$ ou $J = \left]-\frac{1}{2}\ln c_1, +\infty\right[$.

b) $y = 1$ const ou $y = -1$ const ne peuvent pas être des solutions de ce pb. de Cauchy.

On cherche une solution de la forme $(5)'$

$0 = \dfrac{1+c_1 e^{2\cdot 0}}{1-c_1 e^{2\cdot 0}} \iff 0 = \dfrac{1+c_1}{1-c_1}$

Cela donne $c_1 = -1$

Comme $c_1 < 0$ de a) $\Rightarrow J = \mathbb{R}$ donc la solution est globale.

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad y(t) = \dfrac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Exercice 4.

a) F continue et lipschitzienne (F indep de t) donc le théorème de Cauchy-Lipschitz global s'applique.

b) C'est un schéma du type standard $y_{n+1} = y_n + h\,\phi(t_n, y_n, h)$

avec $\phi : [0,T] \times \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$
$(t, x, h) \to \cancel{g(x,h)}\ \phi(t,x,h) = g(x,h)$

On a $\forall u, v \in \mathbb{R}$, $\forall h \in [0,1]$

$g(u,h) - g(v,h) = aF(u) + bF(u+hF(u)) - aF(v) - bF(v+hF(v))$

$= a\,[F(u)-F(v)] + b\,[F(u+hF(u)) - F(v+hF(v))]$

Alors en utilisant l'hypothèse sur F et l'inég triangulaire.

$|g(u,h)-g(v,h)| \leq |a|\,L\,|u-v| + |b|\,L\,|\underbrace{u+hF(u)-v-hF(v)}_{=u-v+h(F(u)-F(v))}|$

donc

$|g(u,h)-g(v,h)| \leq |a|\,L\,|u-v| + |b|\,L\,(|u-v| + \underbrace{h}_{\leq 1} L\,|u-v|)$

Finalement

$|g(u,h)-g(v,h)| \leq (\underbrace{|a|L + |b|L + |b|L^2}_{=L_1 \text{ constante}})\,|u-v| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$

Ceci nous donne la stabilité du schéma par un résultat du cours.

c) g est continue.

$g(x,0) = aF(x) + bF(x) = (a+b)\,F(x)$

Une condition suffisante de consistance est

$g(x,0) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$

$(a+b)\,F(x) = F(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Alors ~~si~~ $a+b=1 \Rightarrow$ le schéma est consistant

d) Par dévelop. de Taylor ~~...~~ ~~...~~ de F autour de x on a

$F(x+hF(x)) = F(x) + F'(x)\,hF(x) + \frac{1}{2}F''(x+\theta hF(x))\,h^2F^2(x)$

avec $0 < \theta < 1$

Ceci donne

$$g(x,h) = (a+b)F(x) + b\,h\,F'(x)F(x) + \frac{1}{2}F''(x+\theta hF(x))h^2F^2(x)$$

En prenant $x = Y(t)$ on obtient

(6)' $$\left[g(Y(t),h) - (a+b)F(Y(t)) - b\,h\,F'(Y(t))F(Y(t))\right] = A(t,\theta)\,h^2$$

avec $A(t,\theta) = \frac{1}{2}F''(Y(t)+\theta hF(Y(t)))F^2(Y(t))$

Comme Y est borné sur tout ensemble borné et F et F'' sont bornées sur tout ensemble borné, $\theta \in]0,1[$ et $h \in [0,1]$ alors il existe une constante $C > 0$ dependante de la solution Y telle que

(7)' $$|A(t,\theta)| \leq C \qquad \forall t \in [0,T],\ \forall \theta \in [0,1]$$

Avec (6)' ça nous donne le résultat.

e) On considère l'erreur de consistance ~~R(t,Y,h)~~ R

$$R(t,Y,h) = \frac{1}{h}\left[Y(t+h) - Y(t) - h\,g(Y(t),h)\right] = R_1 + R_2$$

avec

$$R_1 = \frac{1}{h}\left[Y(t+h) - Y(t) - h(a+b)F(Y(t)) - h^2 b\,F'(Y(t))F(Y(t))\right]$$ et

$$R_2 = \frac{1}{h}\left[-h\,A(t,\theta)\,h^2\right]$$

De (7)' on a

(8)' $|R_2| \leq C h^2$

D'autre part, $F(Y(t)) = Y'(t)$ et $F'(Y(t))F(Y(t)) = F'(Y(t))Y'(t) = \frac{d}{dt}F(Y(t)) = (Y')' = Y''(t)$

donc

$$R_1 = \frac{1}{h}\left[Y(t+h) - Y(t) - h(a+b)Y'(t) - h^2 b\,Y''(t)\right]$$

On va prendre $a+b = 1$ et $b = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{a = b = \frac{1}{2}}$

Alors

$$R_1 = \frac{1}{h}\left[Y(t+h) - Y(t) - hY'(t) - \frac{1}{2}h^2Y''(t)\right]$$. Par Taylor →

$$R_1 = \frac{1}{h}\,\frac{1}{6}h^3Y^{(3)}(t+\theta_2 h) = \frac{h^2}{6}Y^{(3)}(t+\theta_2 h)$$

$0 < \theta_2 < h$ donc $0 \leq \theta_2 h \leq 1$

Mais $F \in C^2 \Rightarrow Y \in C^3$ donc $Y^{(3)}$ bornés sur ensembles bornés

(9)' $|R_1| \leq C_2 h^2$ $\quad C_2$ ~~dont~~ const.

De (8)' et (9)' $\Rightarrow$ $|R| \leq (C + C_2)h^2$ donc consistance à l'ordre au moins 2.