Polytech Lyon, MAM3A, 2021-2022

Analyse Numérique (AN)

Partiel 1 - octobre 2021

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

Soit $\Omega =]a, b[$ un ouvert borné dans $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ des constantes avec $\beta \geq 0$. On se donne aussi deux fonction $f, \gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $f \in C(\bar{\Omega})$ et $\gamma \in C^1(\bar{\Omega})$. On suppose en plus que $\gamma(x) > 0, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}$.
On considère l'q́uation différentielle suivante avec conditions aux limites du type Neuman: trouver $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ satisfaisant

$$-(\gamma u')'(x) + \beta u(x) = f(x), \quad \forall\, x \in \Omega \tag{1}$$

et

$$\begin{cases} u'(a) &= \alpha \\ u'(b) &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

Pour approcher le problème par un système linéaire algébrique, on utilise les mêmes notations qu'en cours et à l'Exercice 2 de TD2. On fixe $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 3$ assez grand, on pose $h = \frac{b-a}{N+1}$, on pose $x_i = a + ih$ pour tout $i \in \{0, 1, \cdots N+1\}$ et on note par U_i une approximation de $u(x_i)$.
Pour discrétiser (1) on va noter par $W_{i+1/2}$ une approximation de $\gamma(x_i + h/2)u'(x_i + h/2)$ pour tous $i = 0, 1, 2, \cdots N$; cette approximation sera $W_{i+1/2} = \gamma(x_i + h/2)\frac{U_{i+1}-U_i}{h}$ (par commodité il sera préférable de noter $\gamma_{i+1/2} = \gamma(x_i + h/2)$ pour tout i de 0 à N). On approchera ensuite $(\gamma u')'(x_i)$ par $\frac{W_{i+1/2}-W_{i-1/2}}{h}$.
D'autre part pour (2) on approchera $u'(a)$ par $\frac{U_1-U_0}{h}$ et $u'(b)$ par $\frac{U_{N+1}-U_N}{h}$.

a) Ecrire les approximations de (2) comme deux équations faisant intervenir U_0, U_1, U_N et U_{N+1}. Montrer qu'on peut exprimer U_0 en fonction de U_1 et U_{N+1} en fonction de U_N.

b) Ecrire un système algébrique linéaire d'inconnues $U_1, U_2, \cdots U_N$ qui approche le problème (1) - (2) . Ecrire ce système sous la forme matricielle $AU = b$ avec $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^N$ à préciser.

c) Montrer que A est une matrice symétrique et positive.

d) On suppose ici que $\beta > 0$.
Montrer que A est une matrice définie positive.

e) On suppose ici que $\beta = 0$.
Montrer que A n'est pas une matrice inversible
Indication: mettre en évidence un élément non nul de $Ker(A)$.

Exercice 2.

On se donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, un vecteur $b \in \mathbb{K}^n$ et on considère la matrice carrée

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la première colonne est le vecteur b et les autres colonnes sont le vecteur 0, donc pour tout $i \in [[1, n]]$ on a

$$A_{ij} = \begin{cases} b_i & \text{si } \ j = 1 \\ 0 & \text{si } \ j \geq 2. \end{cases}$$

On se donne aussi $p \in \mathbb{R}$ avec $p \geq 1$ et on se propose de montrer que

$$\|A\|_p = \|b\|_p$$

où $\|A\|_p$ désigne la norme matricielle de A subordonnée à la norme vectorielle $\| \cdot \|_p$

$$(\text{rappel} \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \forall\, x \in \mathbb{K}^n).$$

a) Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ arbitraire calculer Ax et montrer l'égalité

$$\|Ax\|_p = |x_1|\, \|b\|_p.$$

b) En déduire l'inégalité

$$\|A\|_p \leq \|b\|_p.$$

c) Montrer l'égalité demandée en choisissant un vecteur approprié.

d) (**Application**): calculer $\|A\|_3$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que toute valeur propre complexe λ de A est de module égal à 1.

Indication: trouver un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ approprié tel que

$$x^* x = |\lambda|^2 x^* x.$$

b) Soient X et Y deux vecteurs propres de A associés à deux valeurs propres complexes λ et μ respectivement, avec $\lambda \neq \bar{\mu}$. Montrer que $Y^T X = 0$.