Polytech Lyon, MAM3A, 2021 - 2022

Analyse Numérique (AN)

Partiel 2 - 2021

Durée 1h et 30min - Calculettes interdites, une page de notes manuscrites autorisée

Exercice 1.

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Soit $b \in \mathbb{R}^3$ donné par $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre le système algébrique linéaire avec inconnue $x \in \mathbb{R}^3$

$$Ax = b. \tag{1}$$

b) Faire la décomposition (factorisation) $A = LU$ avec $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice triangulaire inférieure avec 1 sur la diagonale et $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ matrice triangulaire supérieure.
c) Résoudre le système (1) en utilisant la décomposition de **b)**.

Exercice 2.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $|\alpha| + |\beta| < 1$.
On admet pour la suite de l'exercice que A est une matrice inversible.
On considère la décomposition standard vue en cours: $A = D - E - F$ avec D matrice diagonale, E matrice triangulaire inférieure avec 0 sur la diagonale et F matrice triangulaire supérieure avec 0 sur la diagonale.

a) Montrer que A est une matrice à diagonale dominante, mais que elle n'est pas à diagonale strictement dominante.

b) Soit G la matrice de Gauss-Seidel associée à la matrice A. On se propose de montrer la convergence de la méthode itérative de Gauss-Seidel pour tout système algébrique linéaire ayant A comme matrice des coefficients, c'est à dire, on veut montrer

$$\rho(G) < 1. \tag{2}$$

b1) Montrer que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de G si et seulement si

$$det(\tilde{G}_\lambda) = 0$$

où on pose $\tilde{G}_\lambda = \lambda(D - E) - F$.

b2) Calculer $det(\tilde{G}_\lambda)$ et montrer qu'on a

$$\rho(G) = |\alpha + \alpha\,\beta - \beta^2|.$$

b3) En utilisant l'inégalité triangulaire et l'hypothèse sur α, β, montrer (2).

c) On suppose ici en plus que $\beta = 0$ (donc $|\alpha| < 1$) et on considère J la matrice de Jacobi associée à la matrice A.

c1) Trouver les valeurs propres de J.

c2) Calculer $\rho(J)$ en fonction de α et montrer la convergence de la méthode itérative de Jacobi.

Exercice 3.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction.

a) Montrer la propriété de permutativité suivante: pour $n+1$ nombres réels arbitraires deux à deux distinctes $x_0, x_1, \cdots x_n \in [a, b]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et pour toute permutation σ sur $\{0, 1, \cdots n\}$ (c'est à dire σ bijection de l'ensemble $\{0, 1, \cdots n\}$ dans lui même) on a

$$f[x_0,\, x_1,\, \cdots\, x_n] = f[x_{\sigma(0)},\, x_{\sigma(1)},\, \cdots\, x_{\sigma(n)}].$$

b) On se propose ici de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition $(\mathcal{P}_n)$ suivante qui donne une formule intégrale pour le calcul des différences divisées:
si f est de classe C^n sur $[a, b]$ alors pour $n + 1$ nombres réels arbitraires deux à deux distinctes $x_0, x_1, \cdots x_n \in [a, b]$ on a
(3)

$$f[x_0,\, x_1,\, \cdots\, x_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} E_n(x_0, x_1, \cdots x_n, t_1, t_2, \cdots t_n)dt_n\, dt_{n-1} \cdots dt_2\, dt_1$$

où on a noté

$$E_n(x_0, x_1, \cdots x_n, t_1, t_2, \cdots t_n) = f^{(n)}(x_0 + t_1(x_1 - x_0) + t_2(x_2 - x_1) + \cdots t_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + t_n(x_n - x_{n-1})).$$

b1) Montrer $(\mathcal{P}_1)$.

b2) Supposons que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie, avec $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Montrer qu'on a

$$g(x_0,\, x_1,\, \cdots\, x_n) = \frac{f[x_0,\, x_1,\, \cdots\, x_{n-2},\, x_n] - f[x_0,\, x_1,\, \cdots\, x_{n-2},\, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-1}}.$$

où nous notons par $g(x_0, x_1, \cdots x_n)$ la partie de droite de (3).

b3) En utilisant la partie **a)** en déduire le résultat attendu.

c) Application: La formule (3) nous permet de généraliser la notion de différence divisée dans le cas où les nombres $x_0, x_1, \cdots x_n$ ne sont pas nécessairement distinctes deux à deux.
Plus précisément, pour $x_0, x_1, \cdots x_n \in [a, b]$ arbitraires et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n on définit $f[x_0,\, x_1,\, \cdots\, x_n]$ par la formule (3).
Montrer que pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$f[\underbrace{x, x, \cdots x}_{n+1 \text{ fois}}] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$